

電磁気学 1 演義 第 3 回 アドバンストクラス追加問題

1. 「静電場において、電荷のない場所で安定な釣り合い点はない」(Earnshaw の定理) について考えよう。(「電荷のない領域で、静電ポテンシャルは極大値も極小値もとらない」と言い換えることもできる。)

(a) 釣り合いの点を 1 つ考え、その場所を原点とし、原点での静電ポテンシャルの値をゼロとする。デカルト座標で考え、原点の近傍でポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ が座標の 2 次の項のみ (2 次形式) で近似できることを示せ。

(b) 適当に座標系を回転すれば、

$$\phi(\mathbf{r}) = ax^2 + by^2 + cz^2 \quad (1)$$

と書ける。(回転行列による実対称行列の対角化。) ラプラス方程式を用いて、 a, b, c の関係を導き、Earnshaw の定理が成り立っていることを確認せよ。

(c) z 軸について軸対称な系を考えると、 $R^2 := x^2 + y^2$ として、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\phi_0}{2d^2}(R^2 - 2z^2) \quad (2)$$

を書けることを示せ。

- (d) 原点近傍以外でもこのポテンシャルを実現する電極を考えよう。 R_0, z_0 を定数として、双曲面 $R^2 - 2z^2 = R_0^2$ (砂時計型、リング電極と呼ばれる) と別の双曲面 $R^2 - 2z^2 = -2z_0^2$ (2 つのお碗型、エンドキャップ電極と呼ばれる) の電極を考え (図 1 参照)、これらの間の電位差を ϕ_0 とする。式 (2) が得られることを示し、 $2d^2$ を R_0, z_0 で表せ。(ヒント: 電極は導体だから等電位である。)

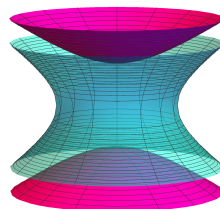


図 1 リング電極 (青) とエンドキャップ電極 (赤)