2017/05/09 出題

電磁気学 1 演義 第 4 回
アドバンストクラス追加問題

1. 空間の静止した 1 点あるいは微小領域に孤立した荷電粒子を長時間保持することを考えよう．このような装置は「イオントラップ」と呼ばれ，(反粒子も含め) 様々な荷電粒子の性質を詳細に調べるために用いられる．Earnshow の定理によれば，静電場ではイオントラップを実現することはできない．ここでは，静電場と静磁場を用いて，Earnshow の定理の制約を越えることを考える．このようなイオントラップは「Penning トラップ」と呼ばれる．静電場としてリング電極とエンドキャップ電極による電場 (第 3 回の問題を参照のこと) を考え，その静電ポテンシャルを

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{\phi_0}{2d^2}(x^2 + y^2 - 2z^2) \tag{1}$$

とする．ポテンシャルの符号を適当に選べば，z 軸上の運動は安定，有界となるが，x-y 平面内の運動は不安定になる．一方，z 軸に平行な一様磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ $(B > 0)$ を考えると，電荷はローレンツ力により磁力線に巻き付くように螺旋運動を行なう．この巻き付く力が x-y 平面内の不安定性に打ち勝てば，電荷をトラップできるだろう．

   (a) 質量 m の電荷 Q が従う運動方程式をデカルト座標の成分で書け．ただし，$\omega_0 := QB/m$, $\omega_z := \sqrt{-2Q\phi_0/(md^2)}$ を用いよ．($\omega_c := |\omega_0|$ はサイクロトロン角振動数と呼ばれる．)

   (b) z 方向の運動が安定になる条件を求めよ．(このときの解は自明であろう．)

   (c) x，y 方向の運動を解くために，複素変数 $u := x + iy$ を導入する．u の従う運動方程式が，

$$\frac{d^2u}{dt^2} + i\omega_0\frac{du}{dt} - \frac{1}{2}\omega_z^2 u = 0 \tag{2}$$

   であることを示せ．

   (d) $u = \exp(-i\omega t)$ と置き，ω を決定せよ．

   (e) 電荷をトラップするには，x，y 方向の運動が有界でなければならない．必要な B の条件を求めよ．(ヒント：ω が実数であればよい．)

   (f) トラップする電荷として電子を考える．$d = 1$ cm，$\phi_0 = 10$ V，$B = 1$ T として，上の条件を満していることを確認し，$\omega_c/(2\pi)$，$\omega_z/(2\pi)$，$\omega_-/(2\pi)$ を有効

数字 2 桁で求めよ．ただし，ω_- は ω の 2 つの解の絶対値が小さい方の大きさ (マグネトロン角振動数と呼ばれる) を表わす．(絶対値が大きい方は $\omega_+ \simeq \omega_c$ となるので，荷電粒子の運動はこれらの 3 つの振動の組み合わせになる．)

Dehmelt は，Penning トラップを用いて電子および陽電子の磁気能率の精密測定に成功した．その結果は量子電気力学 (QED) による理論計算と一致し，QED は物理学における最も高精度な理論となった．これにより，Dehmelt は (Paul らと共に)1989 年のノーベル物理学賞を受賞した.