電磁気学１演義 試験問題

1. 以下の公式を示せ．ただし，f はスカラー場，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ はベクトル場とする．
   (a) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f) = 0$
   (b) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B})$
   (c) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - \triangle \boldsymbol{A}$
   (d) $\displaystyle\int \boldsymbol{\nabla} f \, dV = \int f \, d\boldsymbol{S}$
   ただし，$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} dS$ で，$\boldsymbol{n}$ は外向き単位法線ベクトルである．
   ヒント: $\boldsymbol{A} = f\boldsymbol{c}$ ($\boldsymbol{c}$ は定数ベクトル) として，$\boldsymbol{A}$ にガウスの定理を用いる．
2. 静電ポテンシャルが $\phi(r) = Ae^{-r/a}/(4\pi\varepsilon_0 r)$ で与えられるような静電場がある．A，a は定数で，$a > 0$ とする．
   (a) ポアッソン方程式を用いて原点以外での電荷分布を求めよ．
   (b) 原点以外での電場を求めよ．
   (c) ポテンシャルが $r \ll a$ で $1/r$ の様に振舞うから，原点に点電荷があると考えられる．原点を中心とする微小な球面に積分形のガウスの法則を適用して，原点にある電荷の大きさを求めよ．
   (d) 原点以外にある電荷の総量を求めよ．
3. 次のような真空中の電磁波を考える: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 \sin(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})$. ただし，$\boldsymbol{E}_0$，$\boldsymbol{k}$ は実定数ベクトル，ω は正の定数である．
   (a) $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{E}$ が直交することを示せ．
   (b) ω と $\boldsymbol{k}$ の関係を求めよ．結果は真空中の光速 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ を用いて表せ．
   (c) 磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ を求めよ．ただし，静磁場はないものとする．
   (d) ポインティングベクトルの向きを求めよ．
   (e) ポインティングベクトルの次元を SI 単位で示せ．だたし，結果は SI 基本単位 [s], [m], [kg], [A]，および [J] の内で必要なものを用いて簡潔に表せ．
4. 極板の面積 A，極板間の距離 d の平行板コンデンサーについて考える．(極板の端での場の乱れは無視し，場は極板に垂直な成分のみとする．) このコンデンサーの極板間を誘電率 ε の固体誘電体で満たし，電源に接続し極板間の電位差を V_0 とした．
   (a) 極板間の電場の大きさ E と電束密度の大きさ D を求めよ．
   (b) 極板の電荷を求めよ．
   (c) 静電容量を求めよ．
   (d) 電源に接続したまま，極板間の距離を $2d$ に拡げた．(つまり，電位差に変化はなく，誘電体のない部分の距離は d である．) このときの極板の電荷を求めよ．
5. 一様に磁化した半径 a の球がある．磁化を $\boldsymbol{M} = M\hat{\boldsymbol{z}}$ とする．
   (a) 表面磁化電流密度 $\boldsymbol{K}_m$ を求めよ．
   (b) 上で求めた電流密度が作る磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m}$ を求めよ．
   (c) $\boldsymbol{m}$ が磁化 $\boldsymbol{M}$ による全磁気双極子モーメントに一致していることを確かめよ．

必要があれば以下の式を用いてもよい．

- bac-cab ルール

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$

- 球対称の場合のラプラシアン

$$\Delta\phi = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\phi)$$

- 真空中のマクスウェルの方程式

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\rho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t})}{\varepsilon_0}, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$$

- 表面磁化電流密度

$$\boldsymbol{K}_m = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n}$$

  ただし，$\boldsymbol{n}$ は外向き単位法線ベクトル．

- 電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ が作る磁気双極子モーメント

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}\, dV$$