電磁気学１演義　　　　　　第 2 回　2017 年 4 月 18 日

1. ある「流れ」の場 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = f(r)\hat{r}$ を考える。ここで $r = |\boldsymbol{r}|$、$f(r)$ はその関数、また $\hat{r} = \frac{\hat{r}}{r}$ は原点から動径方向に向かう単位ベクトルである。

   (a) 原点を中心とする半径 a の球の領域を $V(a)$、その表面を $S(a)$ としよう。表面を通過して外に流れ出す流量は $\int_{S(a)} \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S}$ である。これを面積分を実行することによって求めよ。

   (b) 湧き出し (divergence) $\nabla \cdot \boldsymbol{j}$ を求めよ。

   (c) ガウスの定理 $\int_{S(a)} \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{V(a)} \nabla \cdot \boldsymbol{j} dV$ によれば (b) で求めた湧き出しの体積積分を行うと (a) の結果に一致するはずである。確かめてみよ。

2. $\nabla \cdot \frac{\hat{r}}{4\pi r^2} = \delta^3(\boldsymbol{r})$ を示そう。ここで右辺はデルタ関数 (3 次元の) である。実際、次のことがなりたつことを示せ： (1) 左辺は原点以外で値が 0 (2) 左辺を原点を囲まない任意の領域での体積積分すると 0 (3) 左辺を原点を囲む任意の領域で体積積分すると 1。(ヒント：前問)

時間的に定常な電荷分布があると静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ ができる。静電場のしたがう Maxwell 方程式は、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0} \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{1}$$

である。ここで $\rho(\boldsymbol{r})$ は電荷密度、 ϵ_0 は真空の誘電率である。これらの方程式を満たす電場は次のように静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ を用いて表すことができる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \qquad \phi(\mathbf{r}) = \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{2}$$

3. 半径 a の球に電荷 Q が一様に分布している。$Q \geq 0$ とする。これによって生じる電場を求めよ。電場はベクトル量なので、電場の向きも答えること。誘電率は球の内外で変化しないとする。

   Maxwell 方程式 (1)、ガウスの定理を用いれば良い。電荷分布は球対称であるので、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\hat{\boldsymbol{r}}$ と仮定できる。ここで r は球の中心からの距離、$\hat{\boldsymbol{r}}$ は動径方向の単位ベクトル (外向き) である。

   (別解) (計算は多少面倒) 静電ポテンシャル ((2) の第 2 式) を求めよ。 電荷分布の球対称性からこれは r のみの関数 $\phi(r)$ となるはずである。これから電場を求めることができる ((2) の第 1 式)。

4. 未知の電荷分布をもつ半径 a の球による電場が $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\hat{\boldsymbol{r}}$ で、$r < a$ では $E(r) = \rho_0 r/(3\epsilon_0)$、$r > a$ では $E(r) = \rho_0 a^3/(3\epsilon_0 r^2)$ の大きさを持つ。このとき球の内外の電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ を Maxwell 方程式 (1) を用いて求めよ。なお、（結果的にそうなってもよいが）電荷密度が球の内外でそれぞれ場所によらず一定であると最初から仮定してはいけない。

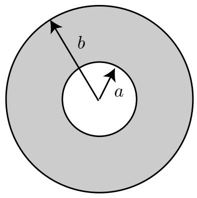

図 1: 問題 4 の図