電磁気学１演義　　　　第４回　2017年５月９日

時間的に定常な電荷分布があると静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ ができる。真空中の静電場は静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ を用いて $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$ と表すことができる。静電ポテンシャルはポワソン方程式

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r})/\epsilon_0 \tag{1}$$

を満たし、

$$\phi(\mathbf{r}) = \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{2}$$

はその解になっている。なお、電荷分布が、3次元的な領域ではなく、曲面上 (あるいは平面上) にある場合は、体積積分を曲面上の面積分に置き換えれば良い: $\int dV'\rho(\mathbf{r}')... \to \int dS'\sigma(\mathbf{r}')...$ ここで $\rho(\boldsymbol{r})$ は電荷密度 (単位体積中の電荷)、$\sigma(\boldsymbol{r})$ は「表面」電荷密度 (単位面積中の電荷) である。例えば、z 軸に垂直な面、$z=0$ 上に電荷分布しているときは、$\rho(\boldsymbol{r}) = \sigma(\boldsymbol{r})\delta(z)$ と書ける。

1. 真空中に、無限に広い平面があり、単位面積あたり σ の電荷が一様に分布している。平面は z 軸に垂直で、$z=0$ にあるとする。電荷密度は $\rho(\boldsymbol{r}) = \sigma\delta(z)$ と表せる。ポワソン方程式 (1) を積分して、静電ポテンシャルを求め、またこれから電場を求めよ。対称性からすべての物理量は z のみの関数であると仮定して良い。また $z=0$ に対する反転対称性を仮定して良い。

   ヒント：$\int dx\delta(x) = \theta(x)$ となる。ここで、$\theta(x)$ は階段関数で $x>0$ では 1、$x<0$ では 0 となる。

2. 真空中に、半径 a の円板があり、単位面積あたり σ の電荷が一様に分布している。

   (a) この円盤の中心から高さ $z(>0)$ の点における静電ポテンシャル (2) を、積分を実行することによって求めよ。

   (b) そこでの電場を求めよ。

   (c) 上で求められた電場について、$z/a \ll 1$ および $z/a \gg 1$ での振る舞いを調べよ。[1]

3. 真空中に半径 a の厚さが無視できる球殻上に、単位面積当たり σ の電荷が一様に分布している。

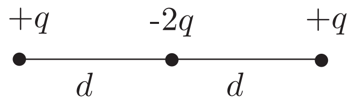
   (a) 球の中心から距離 r の点における静電ポテンシャル (2) を、積分を実行することによって求めてみよ。球の外、内部で場合分けが必要である。

   (b) 空間各点での電場を求めよ。

[1] それぞれ、期待される結果であるか？

4. 図のように電荷が配置されているとき、電荷分布の中心から十分離れた点における静電ポテンシャルと電場を、d の 2 次までの正確さで求めよ

(1)



(2)