# 電磁気学１演義　　　　　第７回　2017 年 5 月 30 日

1. 導体中における電磁波の伝搬を考える。[1] 電流密度は $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$ のように電場 $\boldsymbol{E}$ に比例するものとする。ここで $\sigma$ は電気伝導度で、抵抗率の逆数であり、正の実数とする。これ以外に、電流は存在しないものとする。また電流を運ぶ荷電粒子以外に、反対電荷の静止したイオンなどがあり、導体は電気的に中性で、電荷密度は $\rho = 0$ とする。また誘電率、透磁率は簡単のため真空中と同じでそれぞれ $\epsilon_0$、$\mu_0$ とする。

   (a) この系において電磁場がしたがう Maxwell 方程式を書き下せ。

   (b) 電磁場は次の形の偏微分方程式に従うことを示せ。(ヒント：真空中の場合の導出過程を参考に)

   $$\nabla^2 \psi - \mu_0 \sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

   ここで $\psi$ は、電場 $\boldsymbol{E}$, 磁場 $\boldsymbol{B}$ の任意の成分である。

   (c) 簡単のため、$x$ 軸方向に伝搬する場合を考えよう。平面波 $\psi = e^{i(kx - \omega t)}$ が解になっているとし、波数 $k$ と振動数 $\omega$ の関係を導け。振動数 $\omega$ の波は、進むとともに振幅が指数関数的に減衰することを示せ。

2. 真空中を $z$ 軸方向に伝わる平面電磁波を考える。電場が

   $$\boldsymbol{E} = (E_x, 0, 0)$$

   $$E_x = E_0 \sin(kz - \omega t)$$

   とあらわせるとき、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求め、$\boldsymbol{E}$ と直交することを示せ。また $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ の位相関係、波の伝播速度と $k$、$\omega$ の関係を求めよ。なお、静磁場は存在しないものとする。

   (ヒント) マクスウェル方程式を使う。

3. 真空中を伝わる電磁場は平面波だけではない。原点を中心に放射状に伝わる波を考えよう。いずれにせよ、真空中では電場、磁場の任意の成分 $\psi$ は次の波動方程式に従う。

   $$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

   (a) 原点を中心に球対称に伝搬する波形を考え、$\psi(r, t)$ のように原点からの距離 $r$ と時間 $t$ だけに依存するとすると、

   $$\nabla \psi(r, t) = \hat{r} \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial r}$$

---

[1] 導体中に静電場があり、電荷が静止しているということはありえない。ここでは電流が生じている。

さらに

$$\nabla^2\psi(r,t) = \frac{2}{r}\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi(r,t)}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi(r,t))$$

と表せることを示せ。$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z},$ で、$\hat{r}$ は動径方向の単位ベクトル $\hat{r} = \frac{x}{r}\hat{x} + \frac{y}{r}\hat{y} + \frac{z}{r}\hat{z}$ である。

(b) 上の結果から $r\psi(r,t)$ の従う偏微分方程式を導け。これをもとに、$\psi(r,t)$ の可能な形を一つ示せ。