

場 $\psi(\mathbf{r}, t)$ が波動方程式

$$\square \psi(\mathbf{r}, t) = s(\mathbf{r}, t) \quad \text{ただし} \quad \square \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

に従うとする。右辺の $s(\mathbf{r}, t)$ は場を作る source を表わす。無限遠で 0 になる解は

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int dV' dt' G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) s(\mathbf{r}', t') = -\frac{1}{4\pi} \int dV' \frac{s(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

と書ける。ここで $G(r, t)$ は、 $s(\mathbf{r}, t) = \delta^3(\mathbf{r})\delta(t)$ の場合の特別解 (Green 関数) で、3 次元での具体的な形は $G(r, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t-r/c)}{r}$ であることを用いた。

- ドップラー効果を考えてみよう。場を作る source として、移動しながら周波数 f_0 で振動する「音源」のようなものを考え、 $s(\mathbf{r}, t) = s_0 \cos(2\pi f_0 t) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))$ としてみよう。 $\mathbf{r}_0(t)$ は時刻 t での source の位置を表す。

(a) この source が作る場は次のように表せることを示せ。

$$\psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{s_0 \cos(2\pi f_0 t^*)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t^*)|} \quad \text{ただし} \quad t^* = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t^*)|}{c}$$

- (b) x 軸上を移動する source $\mathbf{r}_0(t) = -vt\hat{x}$ ($c > v > 0$) がある場合、原点で観測される場を考えてみよう。source は時刻 $t = 0$ で原点を通過する。観測される実効的な周波数 f は $f = \frac{c}{c \mp v} f_0$ のようになることを示せ。ここで符号 \mp は、 $t < 0$ 、 $t > 0$ にそれぞれ対応している。

- 真空中の無限に広い面 $x = 0$ の上を、均一な電流が y 方向に流れている場合を考える。電流は、時刻 $t = 0$ にスタートしたとする。ただしこの面は電氣的に中性で表面電荷密度は 0 とする。¹ 電流密度は $\mathbf{j} = K\delta(x)\theta(t)\hat{y}$ と表せる。対称性から物理量は (x, t) のみの関数であるとして良いだろう。この系の磁場 $\mathbf{B}(x, t)$ および電場 $\mathbf{E}(x, t)$ を求めたい。

(参考) 電流が定常的に流れ続けている場合は No5-3 で考えた。その結果から、十分時間が経過したのちには静磁場 $B(x) = -\frac{\mu_0 K}{2} \text{sgn}(x)\hat{z}$ ができていると期待される。ここで $\text{sgn}(x) \equiv 2\theta(x) - 1$ で x の符号を返す関数である。

- (a) 電荷、電流によって生じる電磁場はポテンシャル (A, ϕ) から求めることができる。No 8-3 でやったようにローレンツゲージを取ればベクトルポテン

¹この例題は、ファインマン物理学 18 章、20 章で議論されている。参考にせよ。ただしここでは違う方法 (ファインマン物理学では 21 章) で取り組む。

シャル A 、スカラーポテンシャル ϕ はそれぞれ電流密度、電荷密度を source とする波動方程式

$$\square \phi(\mathbf{r}, t) = -\rho(\mathbf{r}, t)/\epsilon_0 \quad \square \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

に従う。今、電荷密度が 0 なので、スカラーポテンシャル ϕ は 0 である。系の対称性からベクトルポテンシャルも $\mathbf{A}(x, t)$ のように x, t のみの関数で、例えば点 $(x, 0, 0)$ を選んで計算すれば良いであろう。ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(x, t)$ を求めよ。(ヒント: x 軸を中心とする円筒座標系が便利である。)

- (b) 上の結果から、電場と磁場を求めよ。(ヒント: 階段関数 $\theta(x)$ の x 微分はデルタ関数 $\delta(x)$ である。また $f(a) = 0$ ならば $f(x)\delta(x - a) = 0$ として良い。)
- (c) 時刻 $t(> 0)$ における電磁場のエネルギー密度 $u_{\text{em}}(x, t)$ 、ポインティングベクトル $\mathbf{S}(x, t)$ を求めよ。エネルギー密度の空間分布の様子を図示せよ。
- (d) その後、ある時刻 $t_1(> 0)$ で電流を止めた場合を考える。時刻 $t(> t_1)$ での電磁場のエネルギーの空間分布を図示せよ。(ヒント: 電流を切ることを「重ね合わせ」で考えると?)