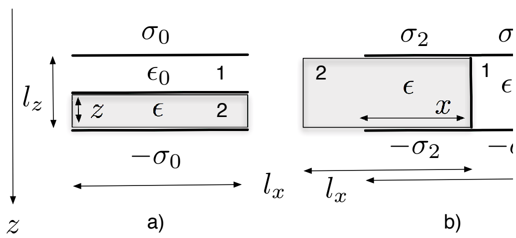
電磁気学1演義　　第11回　2017年6月27日[1]

1. ある誘電体の内部での誘電分極 (密度) が $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ であるとき、分極電荷密度は $\rho_{\rm p}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ となる。[2]
   (a) このとき、「表面」分極電荷密度は $\sigma_{\rm p}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ とあらわせることを示せ。ここで $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ は表面の法線ベクトルである。[3]
   (b) 半径 a の球の内部に一様に分極 $\boldsymbol{P} = P\hat{z}$ がある。表面分極電荷密度を求めよ。結果は、極座標で表示せよ。

2. 分極 $\boldsymbol{P} = P\hat{z}$ で一様に分極した誘電体の中に半径 a の球形の穴があるとき、穴の表面に生じる分極電荷が、穴の中心につくる電場を求めよ。

   講義では、この結果を Clausius-Mosotti の関係式を導くのに用いた。

3. 平行に置かれた2枚の平らな導体板からなるコンデンサーを考える。導体板はどちらも x、y 軸方向の長さが l_x、l_y の長方形で、図のように z 軸に垂直に置かれている。互いの距離を l_z とする。コンデンサーの中には a)、b) のように誘電率 $\epsilon(>\epsilon_0)$ の誘電体 (領域2) が部分的に入っている。この状態で系は固定されている。誘電体は x、y 軸方向の長さが l_x、l_y の直方体で、z 軸方向の厚みは a)、b) で異なっている。また、b) では、x 軸方向に長さ x の分だけがコンデンサーに入っていて、残りははみ出ている。誘電体以外の領域 (領域1) は真空とする。導体板、誘電体の端の効果は無視し、電場、電気分極は z 軸に平行な成分しかないとする。導体板には $\pm Q$、ただし $Q = \sigma_0 l_x l_y$ の電荷が与えられている。



   (1) 誘電体が入っていない場合の、電場の大きさ E_0、静電容量 C_0、静電場のエネルギー U_0 を求めよ。また、導体板に働く単位面積あたりの応力すなわち Maxwell 応力 T_0 を方向を含めて求めよ。[4]

---

[1]yoshino@cmc.osaka-u.ac.jp
[2]すなわち、誘電分極によって生じた電場 $\boldsymbol{E}_{\rm p}$ は $\nabla\cdot\boldsymbol{E}_{\rm p} = \rho_{\rm p}/\epsilon_0$ を満たす。
[3]ヒント：表面上の点 $\boldsymbol{r}$ を含む微小領域 δV に含まれる表面上の微小領域 (2次元) を δS とすると き、電荷密度と「表面」電荷密度の関係は $\int_{\delta V} d^3r\rho(\boldsymbol{r}) = \int_{\delta S} dS\sigma(\boldsymbol{r})$ である。
[4]講義でやったように誘電率 ϵ の領域の表面に働く Maxwell 応力テンソル (外向き法線ベクトル ν 方向の単位面に働く μ 方向の力) は $T_{\nu\mu} = \epsilon[E_\nu E_\mu - \frac{1}{2}\delta_{\mu,\nu}|\boldsymbol{E}|^2]$ である。

(2) a) の場合の電場 $\boldsymbol{E}(z)$、静電容量 C、静電場のエネルギー U を求めよ。結果は見やすくするために U_0、E_0、C_0、体積 $V = l_x l_y l_z$、誘電率の比 ϵ/ϵ_0、z/l_z を用いて表せ。また、誘電体と真空との境界面に働く Maxwell 応力 T を方向を含めて求めよ。(真空、誘電体の両サイドからの寄与があることに注意。) [5]

(3) b) の場合についても同様に考えよ。ただし、z/l_z のかわりに x/l_x が自然なパラメータになることがわかるだろう。仮にコンデンサー内に入る長さ x が可変であるとすると (x 軸方向の長さ l_x は固定)、どうなると予想されるか議論せよ。

[5] 実験の YouTube 動画:https://www.youtube.com/watch?v=cSjbZ-LFdW0