電磁気学１演義　　　　第12回　2017年7月4日[1]

1. 距離 d 離れた $\pm q$ の2つの電荷からなる、一つの電気双極子がある。電気双極子の中心は原点にあり、z 軸に平行に置かれているとする。距離 d は変化しない。

   (a) この電気双極子が作る電位と電場を求めよ。ただし電気双極子からの距離 r が十分遠い $r/d \gg 1$ についてのみ考えれば良い。($d/r \ll 1$ として展開し、主要な項のみを求めれば良い。) 結果は双極子モーメントの大きさ $p = qd$ を用いて表示せよ。[2]

   (b) この電気双極子が電場 $\boldsymbol{E}$ の中に置かれているとする。電気双極子に掛かっているトルクは $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$ となることを示せ。ここで $\boldsymbol{p} = p\hat{\boldsymbol{p}}$ で、$\hat{\boldsymbol{p}}$ は双極子モーメントの方向 ($-q$ の方から $+q$ の方に向かう方向) を表わす単位ベクトルである。

   z 軸を取り直して電場の方向にとり、電気双極子がこれに対してある角度を持っているとしてみよ。

   (c) この電気双極子は大きさが変化しないが、向きは変えられるとする。電場から電気双極子が受けるトルクと逆向きのトルクを外からかけて電気双極子を回転させるのに必要な仕事を求めることで、電気双極子の位置エネルギーが $U = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}$ となることを示せ。[3]

2. 半径 a の円形のリング上を強さ I の電流が流れている。リングの中心に原点をとり、$x-y$ 平面をリングと平行にとり、電流は反時計回りに流れているとする。No6 1 でこの系の作る磁気双極子モーメントが $\boldsymbol{m} = \pi a^2 I \hat{z}$ となることがわかった。今、この系が外部磁場 $\boldsymbol{B}$ の中に置かれている。この系の位置エネルギーが $U = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}$ のように表せることを示そう。

   (a) リングに働くローレンツ力は全体としては0、一方、ローレンツ力によるトルクは $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$ となることを示せ。[4]

   (b) このトルクに逆らってする仕事を考えることにより、$U = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}$ となることを示せ。ただし $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{B}$ が垂直なときエネルギーが0とする。

---

[1] yoshino@cmc.osaka-u.ac.jp

[2] 極座標系で $\nabla = \hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$ となる (参考：横山順一「電磁気学」p248) ここで、$\hat{\boldsymbol{r}}$、$\hat{\boldsymbol{\theta}}$、$\hat{\boldsymbol{\phi}}$ はそれぞれ r、θ、ϕ 方向の単位ベクトルである。

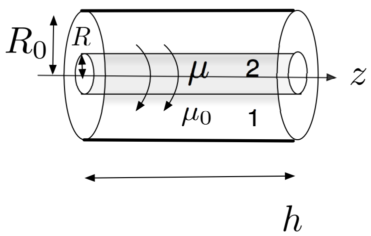
[3] ヒント：トルクのする仕事を思い出してみよう。ある「点」に働く外力 $\boldsymbol{F}$ のする仕事によるエネルギーの増大は $dU = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ ここで微小変位 $d\boldsymbol{r}$ は、例えば、この「点」を y 軸の周りに角度 $d\theta$ だけ回転させる場合、$d\boldsymbol{r} = r d\theta \hat{\theta}$ ただし r はこの「点」と y 軸との距離、$\hat{\theta} = \hat{y} \times \hat{r}$ はこの回転方向の単位ベクトルである。これを考えると、$dU = d\theta(\hat{y} \cdot \boldsymbol{N})$ ただし $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ となる。確認してみよ。

[4] ヒント：例えば $\boldsymbol{B}$ が $x-z$ 平面内にあるように座標軸をとれば $\boldsymbol{B} = B(\cos(\theta)\hat{z} + \sin(\theta)\hat{x})$ となる。ここで θ は z 軸となす角である。リング上の点を $a(\cos(\phi)\hat{x} + \sin(\phi)\hat{y})$ とすると ϕ から $\phi + d\phi$ の微小区間の受けるローレンツ力は $d\boldsymbol{F} = I(a d\phi)\hat{\phi} \times \boldsymbol{B}$ ただし $\hat{\phi} = -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}$ である。ここで ϕ は z 軸の周りの回転角、$\hat{\phi}$ はその回転方向の単位ベクトルである。

3. 磁化 $\boldsymbol{M} = M\hat{z}$ で一様に磁化した半径 a 球形の磁性体を考える。球の中心を原点にとり、1) 球の中心および 2) z 軸上で、球から遠く離れた場所 $|z|/a \gg 1$ での磁場 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。(主要な項のみで良い)

   ヒント：講義でやったように、磁性体の内部での磁化が $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ であるとき、その内部には電流密度 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ の電流 (磁化電流) が流れているとみなせる。また、その表面には「表面」磁化電流密度は $\boldsymbol{K}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ の電流が流れているとみなせる。ここで $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ は表面の法線ベクトルである。

4. z 軸方向に伸びた、長さ h、半径 R_0 の円柱状のコイルを考える。コイルは導線を単位長さあたり n 回巻いたものであり、強さ I の電流が流れている。電流の向きは $+z$ 方向に見たとき、時計回りの方向である。(図の矢印の向き) コイルの中に、図のように半径 R の円柱状の磁性体が、コイルと同心円状に入っている (領域 2)。コイルと磁性体の中心軸を z 軸とする。磁性体の透磁率を μ とする。コイルの内部で磁性体以外の領域 (領域 1) は真空とする。コイルの端の効果は無視し、磁場、磁化は z 軸に平行な成分しかないとする。



   (1) 磁性体が入っていない場合の、磁場の大きさ B_0 、インダクタンス L_0 を求めよ。

   (2) 図のように磁性体が入っている場合の磁場 $\boldsymbol{B}(r)$、インダクタンス L を求めよ。¡ 結果は見やすくするために U_0、B_0、L_0、体積 $V = \pi R_0^2 h$、透磁率の比 μ/μ_0、R/R_0 を用いて表せ。