2018/05/08 出題

電磁気学1演義 第4回
アドバンストクラス追加問題

1. 「静電場において，電荷のない場所で安定な釣り合い点はない」(Earnshaw の定理) について考えよう．(「電荷のない領域で，静電ポテンシャルは極大値も極小値もとらない」と言い換えることもできる．)

   (a) 釣り合いの点を1つ考え，その場所を原点とし，原点での静電ポテンシャルの値をゼロとする．デカルト座標で考え，原点の近傍でポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x})$ が座標の2次の項のみ (2次形式) で近似できることを示せ．
   ヒント: 一般に関数 $\phi(\boldsymbol{x})$ の $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ での Tayor 展開は，

   $$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{a}) + \sum_i (\partial_i \phi(\boldsymbol{a}))(x_i - a_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\partial_i\partial_j\phi(\boldsymbol{a}))(x_i-a_i)(x_j-a_j) + \cdots .$$

   微分は $\partial_i\phi(\boldsymbol{a}) = (\partial\phi/\partial x_i)_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}}$ 等の意味である．

   (b) 適当に座標系を回転すれば，

   $$\phi(\boldsymbol{x}) = ax^2 + by^2 + cz^2 \tag{1}$$

   と書ける．(回転行列による実対称行列の対角化．) ラプラス方程式を用いて，a, b, c の関係を導き，Earnshaw の定理が成り立っていることを確認せよ．

   (c) z 軸について軸対称な系を考えると，$R^2 := x^2 + y^2$ として，

   $$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\phi_0}{2d^2}(R^2 - 2z^2) \tag{2}$$

   を書けることを示せ．

   (d) 原点近傍以外でもこのポテンシャルを実現する電極を考えよう．R_0, z_0 を定数として，一葉双曲面 $R^2 - 2z^2 = R_0^2$ (砂時計型，リング電極と呼ばれる) と二葉双曲面 $R^2 - 2z^2 = -2z_0^2$ (2つのお碗型，エンドキャップ電極と呼ばれる) の電極を考え (図1参照)，これらの間の電位差を ϕ_0 とする．式 (2) が得られることを示し，$2d^2$ を R_0, z_0 で表せ．ヒント: それぞれの電極は導体だから等電位である．

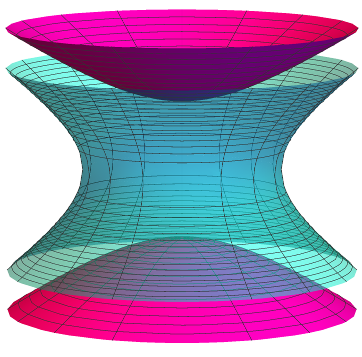

図 1: リング電極 (青) とエンドキャップ電極 (赤)