電磁気学１演義　　　　　　第８回　2018 年 6 月 5 日

0. 真空中を z 軸方向に伝わる平面電磁波を考える。電場が

$$\boldsymbol{E} = (E_x, 0, 0)$$

$$E_x = E_0 \sin(kz - \omega t)$$

とあらわせるとき、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求め、$\boldsymbol{E}$ と直交することを示せ。また $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ の位相関係、波の伝播速度と k、ω の関係を求めよ。なお、静磁場は存在しないものとする。

(ヒント) マクスウェル方程式を使う。

1. z 軸方向にまっすぐ伸びた金属の導線の中を自由電子が流れている。導線の断面は、半径 a の円とする。ただし、金属中には動かない正イオンもあり、電気的に中性である。この金属の抵抗率を ρ とする。電場は金属内で一様で $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{z}}$ ただし $E > 0$ とする。その結果、時間的に定常かつ一様な電流が $+z$ 方向に流れているとする。

   (a) 単位長さあたり、単位時間に熱として失われるエネルギーを求めよ。

   (b) 磁場、およびポインティングベクトルを求めよ。

   (c) 単位長さあたり、単位時間に、表面から出入りする電磁場のエネルギーを求め、(1) の結果と整合していることを確かめよ。

2. 真空中の Maxwell 方程式は以下のとおりである。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

   (a) スカラーおよびベクトルポテンシャル $(\phi, \boldsymbol{A})$ を用いて

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}$$

   としてみる。Maxwell 方程式のうち、2 つの式はこれで満たされていることを示せ。また、ある任意の場 $\chi(\boldsymbol{r}, t)$ を用いて $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi$、$\phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\chi$ としても $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{E}$ は不変であることを示せ。

   (b) Lorentz ゲージ $\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\phi = 0$ を要請すると、Maxwell 方程式の残りの 2 式から

$$\Box\, \phi = -\rho/\epsilon_0 \qquad \Box\, \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}$$

   が得られることを示せ。[講義では後者の導出を省略した。] ここで $\Box = \Delta - (1/c^2)\partial^2/\partial t^2$ また $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ である。

   (c) ここで、χ は波動方程式 $\Box\, \chi = 0$ にしたがうことを示せ。