2020/07/20 出題

電磁気学 1 演義 第 13 回
アドバンストクラス追加問題

屈折率が (空間的に) 周期的に変化するような人工物質は，フォトニック結晶と呼ばれている．以下では，フォトニック結晶中の電磁波について考える．

1. 角振動数 ω の電磁波を考えることにして，全ての電磁場は $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$ と書けるものとする．さらに非磁性誘電体媒質を考え，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=\varepsilon_0\varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\mu_0\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ とする．(簡単のため，誘電率の ω 依存性は無視する．) マクスウェルの方程式から，自由電荷，伝導電流がないとき，
$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}))=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\,,\ \boldsymbol{\nabla}\cdot(\varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}))=0\,, \tag{1}$$
$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=-\frac{i}{\mu_0\omega}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\,, \tag{2}$$
であることを示せ．(c は真空中の光速．)

2. x 方向に周期 a を持つ 1 次元フォトニック結晶を考え，$\varepsilon(\boldsymbol{r})=\varepsilon(x)=\varepsilon(x+a)$ であるとしよう．(y，z 方向は一様．) この媒質中を x 方向に伝搬する直線偏光平面波を考えると，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\hat{\boldsymbol{y}}E(x)$ と置くことができる．$E(x)$ が満す方程式,
$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(x)\right]E(x)=0\,, \tag{3}$$
を導け．

3. 式 (3) の解を $E(x)=e^{ikx}u_k(x)$ と置く．ただし，$u_k(x)=u_k(x+a)$ である．(解がこのように書けることは，ブロッホの定理として知られている．ブロッホの定理については量子力学で習うであろう．) 簡単のため，以下では $\varepsilon(x)=e_0+e_1e^{2ik_ax}+e_{-1}e^{-2ik_ax}$，$k_a:=\pi/a$，$e_0>0$，$e_1=e_{-1}$ としよう．さらに，$u_k(x)$ をモード展開して，
$$E(x)=e^{ikx}\left[E_0+E_1e^{2ik_ax}+E_{-1}e^{-2ik_ax}+\cdots\right] \tag{4}$$
と置く．$\cdots$ は高次のモードであるが，以下では無視する．これらを式 (3) に代入して，$E_{0,\pm1}$ の満す方程式を導け．(e^{ikx}，$e^{i(k\pm 2k_a)x}$ の項の係数を見ればよい．)

4. 上の結果から，$\omega\sim ck/e_0$ かつ $k\sim k_a$ のとき，$E_{0,-1}$ が重要で，E_1 は無視できることが分かる．このとき，非自明な解が存在するための条件が,
$$\begin{vmatrix}\dfrac{\omega^2}{c^2}e_0-(k_a+\Delta)^2 & \dfrac{\omega^2}{c^2}e_1\\ \dfrac{\omega^2}{c^2}e_{-1} & \dfrac{\omega^2}{c^2}e_0-(k_a-\Delta)^2\end{vmatrix}=0 \tag{5}$$
であることを示せ．ただし，$k=k_a+\Delta$ と置いた．

5. 式 (5) は ω と k の関係 (分散関係) を与える．$|\Delta|/k_a\ll|e_1|/e_0\ll 1$ として，ω を Δ の 2 次まで表せ．ただし，$O(\Delta^0)$ の項は e_1 の 1 次まで，Δ^2 の係数は主要な項のみを求めよ．

6. $\omega(\Delta)$ の 2 つの解 (モード) があるが，$e_1 \neq 0$ のとき，$\Delta \sim 0$ で上のモードと下のモードの間にギャップが生じる．(フォトニックバンドギャップと呼ばれる．バンドギャップには伝搬する電磁波が存在しない．) ω のギャップの幅を求めよ．