1. n 個の関数の集合 $\{f_i(x)|i=1,\cdots n\}$ を考える．すくなくとも 1 つの係数 c_i がゼロでないとして，

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i = 0\,, \tag{1}$$

が成立するとき，$\{f_i\}$ は線形従属であるという．一方，すべての i について $c_i=0$ の場合に限って式 (1) が成立するとき，$\{f_i\}$ は線形独立であるという．式 (1) を $n-1$ 回まで微分すると，式 (1) とあわせて c_i についての n 個の連立線形方程式が得られる．すなわち，

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i' = 0\,,\quad \sum_{i=1}^{n} c_i f_i'' = 0\,,\cdots,\quad \sum_{i=1}^{n} c_i f_i^{(n-1)} = 0\,.$$

$c_i \neq 0$ であるような解が存在する (すなわち，$\{f_i\}$ が線形従属である) ための必要十分条件は，

$$W(x) \equiv \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0\,.$$

この W を Wronskian(ロンスキアン) と呼ぶ.

   (a) 単振動の 2 つの解 $\sin\omega t$ と $\cos\omega t$ の Wronskian を求めて，これらが線形独立であることを確かめよ.

   (b) 単振動の 2 つの解 $e^{\pm i\omega t}$ の Wronskian を求めて，これらが線形独立であることを確かめよ.

   (c) 3 つの関数 $e^{\pm i\omega t}$ と $\sin\omega t$ の Wronskian を求めて，これらが線形従属であることを確かめよ.

   (d) 2 つの関数 $f_1(x)=x$ と $f_2(x)=|x|=x\,\mathrm{sgn}\,x$ の Wronskian を求めて，これらの線形独立性を判定せよ．($\mathrm{sgn}\,x$ は x の符号を意味する．)

2. 関数 $y(x)$ についての斉次 2 階線形微分方程式 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ の 3 つの解を y_1，y_2，y_3 とする．これらが線形従属であることを示せ．(つまり，斉次 2 階線形微分方程式に 3 つの独立な解はない．)