

1. 3次元空間を運動している質量  $m$  の自由粒子のラグランジアンを、デカルト座標、円柱座標、球座標で書け。
2. ラグランジアンが時間に陽には依存しないとき、次の量が保存量であることを示せ。

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L.$$

この量は何か。

3. ポテンシャルが座標の  $k$  次の同次関数であるとする。すなわち、

$$U(\alpha \mathbf{r}_1, \dots, \alpha \mathbf{r}_n) = \alpha^k U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n).$$

- (a) 座標を  $\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a/\sigma$  とし、時間を  $t \rightarrow t' = t/\tau$  と変換するとき、ラグランジアン  $L(\mathbf{r}_a, \dot{\mathbf{r}}_a, t)$  が  $L(\mathbf{r}'_a, \dot{\mathbf{r}}'_a, t')$  の定数倍となるような、 $\sigma$  と  $\tau$  の関係を求めよ。
- (b) 運動方程式の解の描く軌道は、上の座標の定数倍の変換によって、相似な軌道に変換される。一方、ラグランジアンを定数倍しても運動方程式が不変であることは明らかである。従って、時間も上で求めたような定数倍の変換を行なえば、この相似な軌道も運動方程式の解になる。 $k = 2, -1$  の場合について、これが意味することは何か。