

1. 一般座標, 一般運動量, および時間の関数,  $A(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ ,  $B(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$  の Poisson 括弧

$$\{A, B\} \equiv \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right)$$

について, 以下の式を示せ.

(a)

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}.$$

(b)  $C$  も  $A, B$  と同様の関数として,

$$\{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B.$$

(c) Jacobi の恒等式

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0.$$

2.  $A$  と  $B$  が保存量であるとき,  $\{A, B\}$  も保存量であることを示せ. (Poisson の定理.)
3. ばね定数  $k$  のばねに取り付けられた質量  $m$  の質点を考える. ただし, ばねの反対側は, 速度  $v_0$  で動いている壁に固定されているものとする. Lagrangian は

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} (x - v_0 t)^2$$

である.

- (a)  $x$  に対応する運動量を  $p$  として, Hamiltonian を求めよ. この Hamiltonian は, 系 (質点) の全エネルギーになっているか. また, この Hamiltonian は保存量か.
- (b) 新しい座標  $x' = x - v_0 t$  を導入し,  $x'$  で Lagrangian を書け.
- (c)  $x'$  に対応する運動量を  $p'$  として, Hamiltonian を求めよ. この Hamiltonian は, 系 (質点) の全エネルギーになっているか. また, この Hamiltonian は保存量か.