2007年度 力学1演義(アドバンス) 問題 No. 6 (2007/05/25)

1. 強制振動について考える．運動方程式は，

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2=ae^{i\omega t}\,. \tag{1}$$

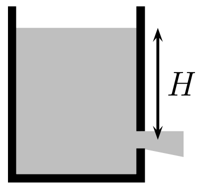
(a) $x(t)=Ae^{i\omega t}$ と置き，充分時間が経過した後の解を求めよ．

(b) 以下では，$\gamma\ll\omega$ とする．$|\omega-\omega_0|=O(\gamma)$ のとき，$|A|^2$ の近似式を求め，それを ω の関数として図示せよ．

(c) $|A|^2$ がその最大値の半分になるときの $2|\omega-\omega_0|$ を半値幅という．半値幅を求めよ．

(d) $A=|A|e^{-i\phi}$ として，$\tan\phi$ について1bと同様の近似式を求め，ϕ を ω の関数として図示せよ．ただし，$0\le\phi\le\pi$ とする．

2. 右図のような水槽に液体が入っていて，水槽の側面下方の小さな穴から液体が流れ出している．穴の位置から見た液面の高さが H のとき，流出する液体の速さを求めよ．ただし，液体の粘性や摩擦は無視する．(ヒント: エネルギー保存則)



3. スタンダードNo. 6の問題1の単振り子について考える．角度変数 θ の運動方程式は，

$$\ddot\theta=-\omega_0^2\sin\theta\,, \tag{2}$$

である．(導出していない場合は，導出すること．) ここで，$\omega_0\equiv\sqrt{g/\ell}$ は振幅が小さい場合の角振動数である．

(a) 式(2)から，

$$\dot\theta^2=2\omega_0^2(\cos\theta-\cos\theta_A)\,, \tag{3}$$

を導け．ただし，θ_A は θ の最大値である．(この式はエネルギー保存則を表している．)

(b) 式(3)から，$t=0$ で $\theta=0,\dot\theta>0$ として，$\theta=\theta_A$ となる時刻 $\tau/4$(周期の4分の1)が

$$\frac{\tau}{4}=\frac{1}{2\omega_0}\int_0^{\theta_A}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_A/2)-\sin^2(\theta/2)}}\,, \tag{4}$$

と書けることを示せ．

(c) 式(4)で，

$$\sin\beta=\frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_A/2)}\,,$$

と置いて，右辺を β についての積分に変換せよ．

(d) 上で得た式の被積分関数を $O(\sin^2(\theta_A/2))$ まで展開し，項別積分を実行して，

$$\tau=\tau_0\left[1+\frac{1}{4}\sin^2(\theta_A/2)+\cdots\right]\,,$$

となることを示せ．ただし，$\tau_0=2\pi/\omega_0$ は振幅が小さいときの周期である．

(e) $\theta_A=30^\circ$ のとき，周期は τ_0 からどれくらい変化するか．