2007年度 力学1演義(アドバンス) 問題 No. 10 (2007/06/22)

1. 長さ ℓ の重さのない棒の一方の端が自由に回転できる支点に取り付けられ，他端につけられた質量 m の質点が鉛直面内で運動している．

   (a) 最下点からの角度 θ を変数とし，また最大の振れ角を θ_m として $(\theta_m \le \pi)$，エネルギー保存の式を書け.

   (b) エネルギー保存の式より，速度を角度の関数として求めよ．符号に関して，場合分けが必要となる．$\theta_m = \pi/2$(水平まで振れる) の場合について，角度と速度の関係を図示せよ．角度の取りうる範囲に注意.

   (c) 質点が最上点 $(\theta = \pi)$ まで到達できる最小のエネルギーを持つとき，最上点に到達するには無限の時間を要することを示したい．簡単のため，質点が $\theta = \pi$ のごく近くにいるとして，運動を調べよう.

      i. 前問で求めた 角度と速度の関係式で，$\theta_m = \pi$ とする．角度を $\theta = \pi + \phi$ とし，$|\phi| \ll 1$ として展開することにより，$\dot{\phi}$ と ϕ の関係を表す微分方程式を導け. $\phi < 0$ の側から $\phi = 0$(即ち $\theta = \pi$) に近づく場合を考えているので，符号はそれに合わせて決めること.

      ii. 時刻 $t = 0$ で角度は $\phi(0) = \phi_0$ であるとし，上で得た微分方程式を解くことにより，角度 ϕ まで運動するのに要する時間 $t(\phi)$ を求めよ．当然，$\phi_0 < \phi < 0$ である.

      iii. 上の結果より，ϕ を横軸として $t(\phi)$ を図示せよ．これより，最上点 $(\phi = 0)$ に到達するには無限の時間がかかることを確かめよ.

2. 潮汐力について考えよう．地球は球で，全体が海に覆われていて，海面は平衡状態であると仮定する．地球の自転はとりあえず無視する.

   (a) 海面にある小さな質量 m の質点には，地球 (質量 M_e) の重力と遠方にある質量 M の質点 (月) の重力が作用している．この場合，地球の重力はその中心に質量 M_e の質点がある場合と同じとしてよい．適当な慣性系での質点 m の座標を $\boldsymbol{r}_1$，地球の中心の座標を $\boldsymbol{r}_2$，質点 M の座標を $\boldsymbol{r}_3$ とする．また，これらの相対座標を $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3$，$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3$ とする．$\boldsymbol{r}$ の運動方程式が,

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{GM_e\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} - GM\left(\frac{\hat{\boldsymbol{d}}}{d^2} - \frac{\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}\right) \tag{1}$$

   となることを示せ．ただし，$\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$ ($\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトル) 等である.

   (b) 式 (1) の右辺第2項は月の引力の地球の表面と中心での差であり，これが潮汐力である．この力が月に一番近い場所で月の方を向き，一番遠い場所では月の反対方向を向くことを確かめよ.

   (c) 地球の中心を原点とし，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，質点 M(月) の座標を $(R, 0, 0)$ とする．式 (1) の右辺は，単位質量にあたりの力と見倣せ，それに対応する単位質量あたりのポテンシャル $\Phi(\boldsymbol{r})$ が存在する.

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{GM_e}{r} - \frac{GM}{d} + \frac{GMx}{R^2} \tag{2}$$

   であることを確かめよ．($\boldsymbol{d} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}$ で，$\boldsymbol{R}$ は定数であることに注意．$\hat{\boldsymbol{R}} = (-1, 0, 0)$ にも注意せよ．)

(d) r/R は微小量だから，

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{R} + \frac{x}{R^2} + \frac{3x^2 - r^2}{2R^3} + O((r/R)^3) \tag{3}$$

と近似できることを示せ．

(e) 上の近似式を用い，さらに $\boldsymbol{r}$ を極座標で表示すると，

$$\Phi(\boldsymbol{r}) \simeq -\frac{GM_e}{r} - \frac{GMr^2}{R^3}\left(\frac{3}{2}\sin\theta^2\cos\phi^2 - \frac{1}{2}\right) \tag{4}$$

と近似できることを示せ．(定数は捨てる．)

(f) 海面は等ポテンシャル面になっている．$\Phi(\boldsymbol{r}) = -GM_e/r_e$ となるとき，

$$r - r_e \simeq \frac{M}{M_e}\frac{r_e^4}{R^3}\left(\frac{3}{2}\sin\theta^2\cos\phi^2 - \frac{1}{2}\right) \tag{5}$$

となることを示せ．ただし，r_e は M がないときの，地球の中心から海面までの距離である．($|r - r_e| \ll r, r_e$ ゆえ，$1/r_e \simeq 1/r + (r - r_e)/r$ と近似できる．)

(g) θ が与えられたとき，$\phi = 0, \pi$ で潮の高さ $r - r_e$ は最大となり，$\phi = \pi/2, 3\pi/2$ で最小となる．このことから，地球の自転により一日(約)2回の満潮と干潮が起こることがわかる．満潮と干潮の潮の高さの差(潮差)の表式を求めよ．さらに，M(月)$/M_e = 0.012$, $r_e = 6.4 \times 10^6\,\mathrm{m}$，$R$(月)$= 3.8 \times 10^8\,\mathrm{m}$ として，数値を求めよ．

(h) 上で求めた潮差の表式を太陽にも適用して，月によるものとの比を求めよ．$M_\odot/M_e = 3.3 \times 10^5$，$R_\odot = 1.5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$ とせよ．