2007 年度 力学 1 演義 (アドバンス) 問題 No. 11 (2007/06/29)

1. N 個の質点からなる系を考える.

   (a) T を全運動エネルギーとして，次の式を示せ.

$$2T = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{r}_i\right) - \sum_i \boldsymbol{r}_i \cdot \dot{\boldsymbol{p}}_i \tag{1}$$

   (b) 物理量 f の長時間平均を

$$\langle f \rangle \equiv \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)\,dt \tag{2}$$

   と定義する．$f(t)$ が有界な関数 $F(t)$ の時間微分であるとき，$\langle f \rangle = 0$ であることを確かめよ.

   (c) 質点が空間の限られた領域の中で，有限の速さで運動しているとしよう．この系に作用する力は，全てポテンシャル U によるものとして，

$$2\langle T \rangle = \left\langle \sum_i \boldsymbol{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i} \right\rangle \tag{3}$$

   となることを示せ．(ビリアル定理)

   (d) ポテンシャルが座標の k 次の同次関数であるとする．このとき，$2\langle T \rangle = k\langle U \rangle$ であることを示せ.

   (e) 1 次元の調和振動子 ($k = 2$) について，運動方程式の解を用いて, ビリアル定理を確かめよ.

   (f) 全エネルギーを E とすると，万有引力 ($k = -1$) の場合，$E = -\langle T \rangle < 0$ となることを示せ．これは何を意味しているか.

2. 重力ポテンシャルに関する以下の問に答えよ.

   (a) 半径 R, 厚さ ΔR で一定密度 ρ の薄い球殻が，その外側 (球殻の中心からの距離 $r > R$) にある質量 m の質点に及ぼす重力ポテンシャルを求めよ．(球殻を微小体積に分け, 各微小体積を質点とみなして，それらが作るポテンシャルを足し合わせればよい．) 求めたポテンシャルが，球殻の代わりに球殻の中心位置に球殻の全質量 M と同じ質量を持つ質点がある場合のポテンシャルと同じであることを確かめよ.

   (b) 前問の結果を用いて，今度は球対称な質量分布 $\rho(r)$ を持つ球体 (つまり，密度は中心からの距離だけで決まる) が，その外側にある質量 m の質点に及ぼす重力ポテンシャルを求めよ．この場合も，球体の中心に球の全質量と同じ質量の質点があるとした場合のポテンシャルと同じであることを確かめよ.

   (c) 上の球殻で，球殻の内側 ($r < R$) でのポテンシャルを求め，球殻の内側にある質点に働く重力を求めよ.

   (d) 無限に長い線密度 λ の直線の作るポテンシャルを求めよ.

   (e) 無限に広い面密度 σ の平面のポテンシャルを求めよ.