2007 年度 力学 1 演義 (アドバンス) 略解 (No. 1 から No. 6)

No. 1

1. (a) 略.
   (b) $e^{x_1+x_2}$ を x_2 について $x_2=0$ のまわりでテーラー展開.

$$e^{x_1+x_2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(e^{x_1+x_2})^{(n)}|_{x_2=0}\,x_2^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}e^{x_1+x_2}|_{x_2=0}\,x_2^n=e^{x_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_2^n}{n!}=e^{x_1}e^{x_2}\,.$$

   二項定理を用いてもよい.

2.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-mg-s\mu\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\,,\quad s=\frac{\frac{dx}{dt}}{\left|\frac{dx}{dt}\right|}$$

   $[m/\mu]=L$, $[\sqrt{m/(g\mu)}]=T$.

3. 略.
4. (a) $n\ln n+\gamma n+O(\sqrt{n}\,\ln n)$
   (b) $O(f(n))-O(f(n))=O(f(n))$
   (c) 一つめの等号が間違い．正しくは, $\sum_{k=1}^{n}kn=n\sum_{k=1}^{n}k=O(n^3)$

No. 2

1. 後半は行列式の性質を用いる.
2. $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ を用いる.
3. 1 の結果を用いる.
4. 略.
5. (a) 最高高度, 到達距離は 4 倍．飛行時間は 2 倍.
   (b) 全て 6 倍.
6. 略.

No. 3

1. (a) $t/\tau,\omega t\ll 1$ では, $O(t^2)$ まで考えて, $x(t)\simeq Ft^2/(2m)$.
   (b) $v(t=0)=0$ ゆえ, $v(t)=at+\cdots$ となっているはず．よって, $t/\tau\ll 1$ では, 抵抗の項 $-v(t)/\tau$ は無視できる．また, $\omega t\ll 1$ では, $\cos\omega t=1$ と近似できる.
2. $VP=\mathrm{const.}$.
3. 略.
4. (a) $a\neq 1$ のとき, $1/v^{a-1}=1/v_0^{a-1}+(a-1)t$. $a=1$ のとき, $v=v_0e^{-t}$.
   $0<t<\infty$ で $v=0$ となるためには, $(0<)a<1$.
   (b) $a\neq 2$ のとき, $1/v^{a-2}=1/v_0^{a-2}+(a-2)x$. $a=2$ のとき, $v=v_0e^{-x}$.
   $0<x<\infty$ で $v=0$ となるためには, $(0<)a<2$.

No. 4

1. $A_0\neq B_0$ のとき, $C(t)=A_0[1-\exp\{\alpha(A_0-B_0)t\}]/[1-(A_0/B_0)\exp\{\alpha(A_0-B_0)t\}]$. $A_0=B_0$ のとき, $C(t)=A_0^2\alpha t/(1+A_0\alpha t)$.
2. $du/dx+(1-n)f(x)u=(1-n)g(x)$.
3. (a) $\alpha(t)=\alpha_0\exp\int_{t_0}^{t}p(t')dt'$.
   (b)

$$f(t)=e^{-\int_{t_0}^{t}p(t')dt'}\left[f(t=t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{\int_{t_0}^{s}p(t')dt'}q(s)ds\right]\,.$$

   (c) 略.
   (d) 略.

No. 5

1. $f(x)=v^2$ として, $df/dx=(2/l)(f-lg)$. これを解いて, $f(x)=lg\{1-\exp(2(x-H)/l)\}$. $v_1^2=f(x=0)$, $v_t^2=lg$, $H=(l/2)\ln(1+v_0^2/(lg))$ より出る.

2. (a) 約 120m/s.
   (b) 約 12s.
   (c) 略.
3. (a) 約 6.6m/s.
   (b) 約 0.7s.
   (c) 約 0.1mm.
4. 略.

No. 6

1. (a) 非斉次方程式の特解を求めればよい． $A = a/(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)$.
   (b) $|A| \simeq a^2/(4\omega_0^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2))$.
   (c) 2γ.
   (d) $\tan\phi \simeq \gamma/(\omega_0 - \omega)$.
2. $v = \sqrt{2gH}$.
3. (a) $\ddot{\theta} = d(\dot{\theta}^2/2)/d\theta$ を用いて，運動方程式を θ で積分すればよい.
   (b) 式 (3) は変数分離形の 1 階微分方程式.
   (c) 略.
   (d) 略.
   (e) 約 1.7%.