

# 格子ゲージ理論におけるカイラル対称性

深谷英則

## 概要

近年、格子カイラルゲージ理論の研究が、大きな進展をみせている。Ginsparg-Wilson 関係式とよばれる式を用いたカイラル対称性の再定義により、厳密なカイラル対称性が、連続理論と無矛盾に実現可能だとわかったからである。とはいえ、このことは古典的なレベルでの話であり、量子論として、真にカイラルな理論が構成できるかどうかを知るためには、格子上でのアノマリーを議論しなくてはならない。Lüscher は、ゲージ場にある条件 (admissibility 条件) を課すことによって、アノマリーをコホモロジー的な手法を用いて分類できる可能性を示した。その結果、格子カイラル  $U(1)$  理論の定式化に成功した。

一方、この admissibility 条件の理論的な重要性は明らかになったが、その具体的な効果について、定量的なことは調べられていない。私は admissibility 条件がシミュレーションに応用可能かどうか、そのもたらず具体的な効果はどれほどのものかを調べてみることにした。私はベクトル的な 2 次元 2 フレーバー QED (massive Schwinger model) のシミュレーションを行い、admissibility 条件の有無による違いを比較した。その結果、admissibility 条件には、ゲージ場のトポロジカルチャージを保存し、カイラル対称性も改善する効果があることを確認した。

この論文は、格子上のカイラル対称性の実現における admissibility 条件の理論的重要性、および、シミュレーションへの応用の効果について述べたものである。

# 目次

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>格子理論の chiral 対称性と measure current</b>	<b>7</b>
2.1	chiral 対称性がどこまで実現されているか . . . . .	7
2.2	Lattice chiral action の構成とその局所性 . . . . .	8
2.2.1	Lattice action の構成方法の一般論 . . . . .	9
2.2.2	Gauge action . . . . .	9
2.2.3	Fermion action と Ginsparg-Wilson 関係式 . . . . .	10
2.2.4	Admissibility condition と Dirac 演算子の局所性 . . . . .	11
2.2.5	action に関するまとめ . . . . .	12
2.3	Fermion measure . . . . .	13
2.3.1	path integrals . . . . .	13
2.3.2	measure term の定義 . . . . .	14
2.3.3	gauge anomaly . . . . .	16
2.3.4	積分可能条件 . . . . .	17
2.4	Fermion determinant の計算と連続理論との対応 . . . . .	20
2.4.1	computation of fermion determinant . . . . .	20
2.4.2	classical continuum limit . . . . .	21
2.5	local cohomology problem . . . . .	22
2.6	まとめ, および今後の課題と展望 . . . . .	26
<b>3</b>	<b>無限体積格子上の Chiral U(1) 理論</b>	<b>27</b>
3.1	無限体積格子における cohomology . . . . .	28
3.2	U(1) 理論の action と admissible gauge potential . . . . .	31
3.3	U(1) 理論の topological field . . . . .	33
3.4	U(1) 理論の measure term . . . . .	37
3.5	admissibility condition の役割について . . . . .	42
<b>4</b>	<b>有限体積格子上の Chiral U(1) 理論</b>	<b>42</b>
4.1	有限体積の U(1)field の topology . . . . .	42
4.2	fermion measure と field space 上の U(1) 束 . . . . .	44
4.2.1	主束とその接続について . . . . .	44
4.2.2	接続としての measure term, 曲率 . . . . .	47
4.3	n 次元 torus 上の接続 . . . . .	48
4.4	有限体積格子上の current $j_\mu$ の存在 . . . . .	48
4.5	まとめ . . . . .	50

<b>5</b>	<b>admissibility のシミュレーションへの応用</b>	<b>51</b>
5.1	motivation,prospection . . . . .	51
5.2	2次元 QED の復習 . . . . .	52
5.3	シミュレーションの方法 . . . . .	57
5.4	Results . . . . .	59
5.4.1	string tension . . . . .	59
5.4.2	topological charge . . . . .	60
5.4.3	meson mass . . . . .	65
5.5	考察と今後の課題 . . . . .	69
<b>6</b>	<b>conclusion</b>	<b>69</b>
<b>A</b>	<b>notation</b>	<b>71</b>
<b>B</b>	<b>Overlap 演算子の locality</b>	<b>71</b>
<b>C</b>	<b>4+2次元の Chiral anomaly</b>	<b>72</b>
<b>D</b>	<b>Chiral anomaly と指数定理</b>	<b>73</b>
<b>E</b>	<b>シミュレーションに関する補足</b>	<b>74</b>
E.1	anti domain wall の寄与について . . . . .	74
E.2	なぜ chiral limit の $\pi$ 粒子の質量は負になったのか . . . . .	75

# 1 Introduction

格子理論で fermion を正しく扱うことは、とても難しい課題である。

その原因として、連続理論では一意的な微分演算子に対応して、格子上で  
は2種類の(前後非対称な)差分演算子が存在することが挙げられる。

$$(\text{微分}) \quad \partial_\mu f(x) \rightarrow \begin{cases} (\text{前方差分}) & \partial_\mu f(x) \equiv \frac{1}{a} \{f(x + \hat{\mu}a) - f(x)\} \\ (\text{後方差分}) & \partial_\mu^* f(x) \equiv \frac{1}{a} \{f(x) - f(x - \hat{\mu}a)\} \end{cases} \quad (1.1)$$

このため、対称な差分を作るためには、次のように2つの差分の平均をとらざるをえない。

$$(\text{微分}) \quad \partial_\mu \rightarrow \frac{1}{2} (\partial_\mu + \partial_\mu^*) \quad (1.2)$$

これにより、非物理的な fermion の自由度が生じてしまうことが知られている (fermion doubling)。一般に、この非物理的な自由度を排除するためには、高階差分項を加える。(高階差分項はこの自由度に巨大な質量を与える効果がある。) このとき、chiral 対称性を破ることになる。Nielsen, Ninomiya は、fermion doubling の回避と、chiral 対称性の両立は不可能であることを証明した。(Nielsen-Ninomiya の定理 [1][2][3])

このことから、格子上で chiral gauge 理論を構成することは不可能であると考えられてきた。ところが近年、格子上において chiral 対称性は形を変えて存在できることが指摘され、この研究は大きく進展した。この chiral 対称性の「再定義」を与えるのが、Ginsparg-Wilson 関係式とよばれる式である [4]。

$$D\gamma_5 + \gamma_5 D = aD\gamma_5 D \quad (1.3)$$

この新たな chiral 対称性は連続極限  $a \rightarrow 0$  で、元の chiral 対称性と一致し、この対称性を保ったまま doubling を回避することも可能であることが確かめられた [5]。chiral 対称性の定義が変更されているため、Nielsen-Ninomiya の定理に抵触することもない。この関係式を満たす具体的なモデルは、Overlap fermion や、Domain wall fermion などが知られている [6][7][8] [9][10]。

しかし、以上の進展は古典的なレベルでの議論であった。一般に chiral gauge 対称性は、量子効果で破れる。これは anomaly としてよく知られている。連続理論では、理論が持つ fermion の表現が、次の anomaly free の条件を満たすとき、anomaly は存在しない。

$$d_R^{abc} \equiv 2i \text{tr}[R(T^a)\{R(T^b)R(T^c) + R(T^c)R(T^b)\}] = 0 \quad (1.4)$$

( $T^a$  は群の生成子,  $R$  は fermion の表現行列を表す。) 格子理論でも同じ状況になるように構成できるだろうか? この問題は全く自明ではない。なぜなら格子理論の物理量には, 常に  $O(a)$ , あるいはさらに高次の補正が考えられるからである。もしこれらの補正が anomaly に対して存在するならば, ただちに gauge 対称性は破綻し, chiral gauge 理論を構成したことにはならない。

Lüscher は, 格子理論で anomaly を正しく扱うために, fermion measure を必要な条件を満たすように「定義」しなければならないことを示した。そして, これはある局所的な current (measure current) によって与えられることを示した [14]。

anomaly は幾何学的な量であり, 時空を離散化してしまった格子上で議論することはとても難しい。格子上では, もはや幾何学的性質を完全に失ってしまうようにも思われる。ところが, Lüscher は, gauge 場の関数空間にある条件を課すと, 格子上でも幾何学的な性質が保たれることを示した [11]。この条件は admissibility condition とよばれる。

$$\|1 - P_{\mu\nu}(x)\| < \epsilon \text{ for all } x, \mu, \nu \quad (1.5)$$

詳細は後で述べる。この条件を用いて, Lüscher は chiral U(1) 理論の定式化に成功した [10]。また, 非可換群の gauge 理論についても, Lüscher のアプローチは有効であり, 残る課題は, 格子上の cohomology の実現であることが示された [13] [14]。

このように, 最近の研究で格子 chiral gauge 理論は大きく進展したが, 残念ながら, 定式化された U(1) 理論も含めて, 数値計算可能な形にはなっていない。

ところで, admissibility condition は, シミュレーションに応用可能だろうか? また, 応用できた場合, どのような効果があるだろうか? 私は, この条件が, chiral gauge 理論の構成のみに役立つものではなく, vector 的な格子理論においても, その連続極限の性質の保全に役立つのではないかと考えた。具体的には, chiral 対称性に関連した粒子, K-中間子の質量や, ハドロンのプロセスの理論計算における改善が期待できる。

現在, 格子理論による数値計算では, chiral 対称性を改善する手法として, Domain wall fermion というアプローチがとられることが多い。この手法は, 5次元の場の理論をとりいれたものである。5次元方向が無限大の極限で, 低エネルギーでの有効作用が, 4次元の Ginsparg-Wilson 関係式を満たすので, chiral 対称性が大幅に改善される。しかし, admissibility condition は課されていない。

私は, admissibility condition を課すことで, さらに連続理論の性質が保たれ, chiral 対称性も改善されると考える。その根拠として, 次の事実が挙げられる。

- admissibility condition が課されない状況では, gauge 場の幾何学的な性質は失われ, topological sector は存在しない。このとき, 本来存在しないはずの sector からの寄与も, 計算に含まれている可能性がある。admissibility condition を課すことで, topological sector 毎の path integral が可能になる。
- Domain wall fermion は, 局所性が保証されていない。強結合領域において, 非局所的なふるまいが現れ, 連続理論にはありえない寄与が加わる恐れがある。2 節で見るように, admissibility condition は, Dirac 演算子の局所性を保証してくれる [15]。
- 格子理論では, field strength のとる値が有界になっている。たとえば, U(1) 理論で,

$$-\pi \leq F_{\mu\nu}(x) < \pi, \quad F_{\mu\nu}(x) \equiv -i \ln P_{\mu\nu}(x) \quad (1.6)$$

となっている。詳細は本文参照。これに伴い, 通常の格子理論では, gauge 場の action も有界になってしまっていることがわかる。3.2 節で見るように, admissibility condition は, action のとりうる範囲を, 連続理論と同じ,

$$0 < S_G < +\infty \quad (1.7)$$

に保つ。

さらに, topological sector 毎の path integral が可能になることで, 今までの格子理論では扱えなかった,  $\theta$ -vacuum を扱えるようになると考えられる。 $\theta \neq 0$  のふるまいを格子理論で数値シミュレーションするというのも興味深い研究になるであろう。

これらのことから, admissibility condition をシミュレーションにとりいれる意義は大いにあると考える。そこで私は, 2次元の QED において, admissibility condition を課したシミュレーションを行った。その結果, topological charge の保存と, chiral 対称性の改善が確認された。

この論文は, 大きくわけて 3つの部分から構成されている。3つの主な内容は次のとおりである。

1. 格子理論における chiral 対称性の研究の現状を説明する。特に, 局所的な chiral 対称性 (chiral gauge 対称性) の実現のために必要な”measure current”について述べる。
2. Chiral U(1) 理論の定式化における, admissibility condition の役割について議論し, 具体的に”measure current’を構成する。

3. admissibility の効果について、実際のシミュレーションの結果をふまえて考察する。

## 2 格子理論の chiral 対称性と measure current

この節では、格子理論における chiral 対称性、特に局所的 chiral 対称性 (chiral gauge 対称性) に関する最近の進展をまとめる。Lüscher は、「量子論としての chiral gauge 対称性の実現のためには、ある current を構成すれば必要かつ充分である。」ということを示した。この current を構成することは、fermion 積分の measure の定義に相当する。(以下、この current のことを measure current とよぶ。)

### 2.1 chiral 対称性はどこまで実現されているか

はじめに、格子理論における chiral 対称性が、どこまで理解されているかをまとめよう。現状は次のようなものである。

1. Lagrangian の持つ chiral 対称性

古典論としての chiral 対称性は、Ginsparg-Wilson 関係式により実現したとされている。Introduction に記したように、この関係式を用いた chiral 対称性の「再定義」により、連続理論と矛盾することなく、厳密な chiral 対称性を持つ理論が構成できる。

2. chiral anomaly

連続理論の chiral 対称性は、量子効果で破れる (Anomaly)。これには、global な chiral 変換に対する chiral anomaly と、local な chiral 変換に対する chiral gauge anomaly が存在する。そのうち、chiral anomaly については、Ginsparg-Wilson 関係式からよく理解されていて、格子理論においても、Atiyah-Singer の指数定理が成り立つことが示された [5][17]。これについては、Appendix D を参照していただきたい。

3. 摂動論的に見た chiral gauge anomaly

chiral gauge anomaly の理解はまだ完全なものではない。しかし、格子理論は gauge 不変性を保つように正則化された理論であり、連続極限で、gauge covariant な形の anomaly が得られることがわかっている。さらに、摂動論的には、結合定数の all order で chiral gauge anomaly のない格子理論を構成できることが示された。(ただし連続理論が anomaly free の場合のみ [25]。) このことは、摂動論としては、完全な chiral gauge 対称性が格子上で実現できたとも言える。

#### 4. 非摂動的な chiral gauge anomaly の理解

Fujikawa の方法 [17] によれば、連続理論の anomaly は、fermion の measure の変分を正則化することにより得られる。格子理論は正則化された理論であるので、Lüscher は、fermion measure を「定義」するという方針で研究を進めた。その結果、ある条件を満たす current を構成できれば、この current を用いて正しい fermion measure が「定義」できることを示した。この構成法は、Witten の global anomaly をも正しく扱えることがわかっており、この current を定義することができれば、非摂動的に厳密な chiral gauge 対称性を持つ格子理論が実現されることになる。

実際、Lüscher は  $U(1)$  理論でこの measure current を構成し、chiral  $U(1)$  理論の定式化に成功した。

このように、格子上の chiral 対称性は、“measure current さえ得られれば完成”，というあと一步のところまで進展していると言える。しかし、measure current が具体的に構成されたのは、 $U(1)$  理論のみであり、この最後の一步は、容易なものではないことがわかる。

以下では、chiral gauge 対称性に話題をしぼって議論を進める。Lüscher の研究に基づき、measure current がどのような条件を満たせばよいか、また、measure current を与えることにより、どのように chiral gauge 理論が実現されるかを見ていく。

## 2.2 Lattice chiral action の構成とその局所性

ここでは格子上の action について議論する。

格子上の場の理論では、時空を離散化したことによって、連続理論で存在していた対称性の多くが失われてしまう。たとえば、Lorentz 対称性、並進対称性は明らかに失われていることがわかる。chiral 対称性も通常の形のままでは fermion doubling の解決と両立することができない (Nielsen-Ninomiya の定理) [1][2][3]。

それにもかかわらず、格子 gauge 理論は QCD の研究において重要な役割を果たしてきた。この理由は、格子 gauge 理論が gauge 対称性を厳密に保つことができたからである。従って、chiral gauge 理論の構成においても、厳密な gauge 対称性が当然要求される。これは chiral 対称性と両立されなければならない、容易なことではない。この両立のために重要となるのは、いかに連続理論の性質を保ちつつ、格子理論を定義していくかということである。

### 2.2.1 Lattice action の構成方法の一般論

格子上の action とは、「連続理論の微分を差分に置き換えて定義されるもの」と考えられがちであるが、そうではない。重要なのは「 $a \rightarrow 0$  の極限で、連続理論を再現できるかどうか」である。例えば、fermion の action の微分を差分に置き換えるだけでは、連続理論では存在しない自由度が生じてしまい (fermion doubling), これは  $a \rightarrow 0$  の極限でも消えることはない。そこで、連続理論を再現するためには、格子上の action の形が連続理論のものとは異なる方が望ましいような状況もあるのである。ただし、action そのものも  $a \rightarrow 0$  の極限で連続理論の action と一致しなければならないので、この変形は  $O(a)$  で行なわれる。具体的には高階微分を加えた Wilson action (doubling を解決, ただし chiral 対称性を破る。) や clover action (Wilson action にさらに高階微分を加えて chiral 対称性を改善したもの。) がよく知られている。

- Wilson action

$$S_w = a^4 \sum_x \bar{\psi}(x) \left\{ \frac{1}{2} \gamma_\mu (\nabla_\mu^* + \nabla_\mu) - \frac{a}{2} \nabla_\mu^* \nabla_\mu \right\} \psi(x) \quad (2.1)$$

notation は Appendix A 参照。

逆に、 $a \rightarrow 0$  で連続理論を再現するという条件を満たすなら、格子上の action は無数に選べることになる。こうして無数に考えられる action のなかから、いかに理想的なものを選ぶかが問題となる。「理想的」とは格子上でも連続理論の性質を良く保っているということである。Ginsparg-Wilson 関係式を満たす Dirac 演算子や、admissibility condition なども、格子理論が連続理論の性質をよりよく保つための条件になっていることがわかる。

### 2.2.2 Gauge action

格子理論では、gauge 場を次の link 変数で表す。

$$U_\mu(x) \in G \quad (2.2)$$

$G$  は Lie 群とする。gauge 変換は次で与えられる。

$$U_\mu(x) \rightarrow \Lambda(x) U_\mu(x) \Lambda(x + \hat{\mu}a)^{-1} \\ \Lambda(x) \in G \quad (2.3)$$

$\hat{\mu}$  は  $\mu$  方向の単位ベクトルである。 $a$  は格子の間隔を表す。

ここで次の plaquette とよばれる量を定義する。

$$P_{\mu\nu}(x) = U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}a) U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu}a) U_\nu^\dagger(x) \quad (2.4)$$

plaquette は gauge 不変な量であり、連続理論における  $e^{a^2 F_{\mu\nu}(x)}$  に相当する。

通常の格子理論における gauge 場の action は、次のように定義される。

$$S_G = \beta a^4 \sum_x \sum_{\mu, \nu} \text{Tr} \{1 - \text{Re} P_{\mu\nu}(x)\} \quad (2.5)$$

これは Wilson が提案した action で、シミュレーションでも広く利用されているものである。 $\beta$  は結合定数の  $-2$  乗に比例する定数である。この action は格子上で厳密な gauge 対称性を持ち、連続極限  $a \rightarrow 0$  で連続理論の action と一致する。

chiral gauge 理論の構成に関する Lüscher の研究では、link 変数が次の条件を満たすような action を用いる。

$$\|1 - P_{\mu\nu}(x)\| < \epsilon \text{ for all } x, \mu, \nu \quad (2.6)$$

$\epsilon$  はある定数である。 $\|\cdot\|$  はノルムを表す。これが admissibility condition と呼ばれる条件である。この条件は後で述べる Dirac 演算子の locality を保証するほか、gauge 場の空間を topological sectors に分離するという効果がある。この条件を満たす action は、式 (2.5) を変形することによって与えられる。たとえば、

$$S_G = \begin{cases} \beta \sum_P \frac{(1 - \text{Re} P_{\mu\nu}(x))}{1 - \|1 - P_{\mu\nu}(x)\|/\epsilon} & \text{if admissible} \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.7)$$

のように action を定めればよい。 $(\sum_P$  は、全ての plaquette について足し上げることを表す。) 変形された部分は  $O(a^2)$  なので、連続極限でのふるまいが変わることはない。admissibility condition は、格子上の gauge 場にある種の滑らかさを要求するものであり、連続理論では存在しないような vortex などの出現を防いでいる。これにより、時空が離散化された格子上においても、幾何学的な扱いができることが示された [16]。このことが格子理論での anomaly を議論する上で重要な役割を担っている。なお、式 (2.6) の左辺は  $O(a^2)$  であり、 $a \rightarrow 0$  の極限では、条件そのものもなくなることがわかる。したがって、連続理論と矛盾するものではない。

### 2.2.3 Fermion action と Ginsparg-Wilson 関係式

fermion の action は次のように定める。

$$S_F = a^4 \sum_x \bar{\psi}(x) D(x, y) \psi(y) \quad (2.8)$$

ただし、Dirac 演算子  $D$  は次の Ginsparg-Wilson 関係式を満たし、 $a \rightarrow 0$  で連続理論の  $\not{D}$  と一致するものとする。

$$D\gamma_5 + \gamma_5 D = aD\gamma_5 D \quad (2.9)$$

ここで次の量を定義しよう。

$$\hat{\gamma}_5 \equiv \gamma_5(1 - aD) \quad (2.10)$$

この  $\hat{\gamma}_5$  には次のような性質がある。

$$\hat{\gamma}_5^\dagger = \hat{\gamma}_5 \quad , \quad \hat{\gamma}_5^2 = 1 \quad (2.11)$$

この  $\hat{\gamma}_5$  を用いて, Ginsparg-Wilson 関係式を次のように書き直すことができる。

$$D\hat{\gamma}_5 + \gamma_5 D = 0 \quad (2.12)$$

このとき, 次の変換の下で, action は不変である。

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow e^{i\alpha\hat{\gamma}_5}\psi \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x)e^{i\alpha\hat{\gamma}_5} \end{aligned} \quad (2.13)$$

これは, 格子上における chiral 対称性の「再定義」と解釈できる。つまり, 次のような拘束条件を fermion に課すことにより, left (right) hand fermion のみの chiral gauge 理論を作ることができるのである。

$$\begin{aligned} \hat{P}_-\psi_L(x) = \psi_L(x) \quad , \quad \bar{\psi}_L(x)P_+ = \bar{\psi}_L(x) \\ \hat{P}_+\psi_R(x) = \psi_R(x) \quad , \quad \bar{\psi}_R(x)P_- = \bar{\psi}_R(x) \end{aligned} \quad (2.14)$$

ただし,

$$\hat{P}_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \hat{\gamma}_5) \quad , \quad P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5).$$

この Ginsparg-Wilson 関係式を満たす Dirac 演算子は, gauge 不変性と doubling の回避を両立するように構成でき, しかも元の連続理論における chiral 対称性との違いも,  $O(a)$  と小さいことから, 格子上の chiral gauge 理論を構成する上でとても重要な要素になっている。ちなみに格子上の chiral 対称性は, 連続理論のものとは形を変えているので, 「chiral 対称性と doubling の回避の両立は不可能」とする Nielsen-Ninomiya の定理にも抵触することはない。ただし, この Dirac 演算子の locality は自明ではない。実は, gauge 場に要請した admissibility condition が, locality を保証してくれることがわかる。

#### 2.2.4 Admissibility condition と Dirac 演算子の局所性

具体的に議論を進めるために, Ginsparg-Wilson 関係式を満たす Dirac 演算子として, 次の演算子を考えよう。

$$D = \frac{1}{a} \left\{ 1 - \frac{A}{\sqrt{A^\dagger A}} \right\} \quad (2.15)$$

ただし,

$$\begin{aligned} A &= 1 - aD_w, \\ D_w &= \frac{1}{2}\gamma_\mu (\nabla_\mu^* + \nabla_\mu) - \frac{a}{2}\nabla_\mu^* \nabla_\mu \end{aligned}$$

とする。

式 (2.15) の演算子は Neuberger によって考案された Overlap 演算子とよばれるもので, Ginsparg-Wilson 関係式を満たすほか, doubling がない, 連続極限で, 連続理論の  $\mathcal{D}$  に一致する, などの条件を満たしている。

しかし, Overlap 演算子の locality は自明ではない。なぜなら,  $A^\dagger A$  が 0-固有値を持つとき,  $(A^\dagger A)^{-\frac{1}{2}}$  の factor が, locality を破綻させる可能性があるからである。ところが, gauge 場に admissibility condition が課されているとき, 次の不等式が成り立つことが証明できる。(Appendix B 参照。)

$$\|A^\dagger A\| \geq 1 - 30\epsilon \quad (2.16)$$

つまり,  $\epsilon < 1/30$  のとき,  $A^\dagger A$  は 0-固有値を持たず, これにより Overlap 演算子の locality が証明できるのである。詳しい証明は [15] 参照。

ここで格子上の locality についてしっかりと定義しておく必要がある。

ある一つの site の場に対して, 近隣の「有限個」の site の場からのみ相互作用があるとき, 'Strict local' な相互作用であるという。ここでとりあげた Overlap 演算子は, その構造を見れば明らかのように,  $(A^\dagger A)^{-\frac{1}{2}}$  の factor があるので, 一つの site の場に対して, 無限遠方の site からの寄与もゼロではない。従って 'Strict local' ではない。しかし, admissibility condition が  $\epsilon < 1/30$  で課されているとき, 遠方からの寄与は指数関数的に弱くなることが証明できる。このような相互作用も, 連続極限で十分早くデルタ関数的なふるまいとなり, 局所的な相互作用となる。したがって, このような相互作用も local であるとみなせる。

格子理論においては, 「遠方からの寄与は指数関数的に弱くなる」ような相互作用のことを local な相互作用とする。

## 2.2.5 action に関するまとめ

以上の議論をまとめよう。

chiral gauge 理論の action として次のものを定義した。

$$S = S_G + S_F \quad (2.17)$$

$$S_G = \begin{cases} \beta \sum_P \frac{(1 - \text{Re} P_{\mu\nu}(x))}{1 - \|1 - P_{\mu\nu}(x)\|/\epsilon} & \text{if admissible} \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$S_F = a^4 \sum_x \bar{\psi}(x) D(x, y) \psi(y)$$

$$D\gamma_5 + \gamma_5 D = aD\gamma_5 D$$

この action は、厳密な (再定義された) chiral 対称性を持ち、局所性も保証されている。この action と、通常の格子理論で用いられる action とは  $O(a)$  の違いしかない。それにもかかわらず、理論の持つ性質は大きく変わり、連続理論により近くなることがわかる。わずかな違いが大きな効果を生むという点が興味深い。

admissibility condition は、ここでは Dirac 演算子の局所性を保証する役割が主なものであるが、3 節、4 節で見る  $U(1)$  理論の構成においては、さらに重要な役割を果たす。

## 2.3 Fermion measure

2.2 節で action が定義されたので、次は path integral を議論する。格子理論の path integral は、汎関数積分ではなく、well-defined な通常の積分である。紫外発散も一切存在しない。体積を有限にとると、積分する自由度は有限になり、赤外発散もなくなる。

さて、chiral gauge 理論の path integral で、慎重に扱わなければならない量として、anomaly がある。連続理論において、gauge anomaly は、fermion の積分 measure の gauge 変換を正則化することにより得られた (Fujikawa の方法 [17] 参照)。

格子理論は、既に正則化された理論であるので、fermion の積分 measure が、もともと gauge 場に依存しているものとして「定義」されなければならない。この定義のために measure current が登場する。

### 2.3.1 path integrals

式 (2.14) からわかるように、chiral projection は gauge 場に依存した形になっている。従って fermion measure も gauge 場に依存していることがわかる。この gauge 依存性が measure に non-trivial な phase を与え、この phase から、連続理論での gauge anomaly に相当するものが得られる。

具体的に measure を定義するために、次の basis を導入しよう。(以下、left hand fermion のみを扱うことにする。)

$$\hat{P}_- v_j(x) = v_j(x) \quad , \quad (v_k, v_j) \equiv \sum_x v_k^\dagger(x) v_j(x) = \delta_{kj} \quad (2.18)$$

この basis を用いて fermion 場は次のように表すことができる。

$$\psi(x) = \sum_j v_j(x) c_j \quad (2.19)$$

ここで  $c_j$  は Grassmann 変数である。こうして measure は次のように与えられる。

$$D[\psi] = \prod_j dc_j \quad (2.20)$$

この表現は、 $v_j$  の部分に gauge 依存性を押しつける形になっており、Grassmann 変数  $c_j$  を gauge 場と独立に決められるという利点がある。ただし、各 gauge 場の配位に対して、 $v_j$  が一意的に存在するかどうかは自明ではない。つまり、measure の一意性の問題が、 $v_j$  の一意性の問題と等価であることがわかる。ただし、ここで「一意的」という意味は、次のような自明な変換は除いている。

$$\begin{aligned} \bar{v}_j(x) &= v_l(x)Q_{lj}^{-1} \quad , \quad \bar{c}_j = Q_{jl}c_l \\ \det Q &= 1 \end{aligned} \quad (2.21)$$

上のような関係の  $v$  と  $\bar{v}$  は、同値なものとして区別しない。

一方、 $\bar{\psi}$  の projection は gauge 場に依存しない。そのため、次の basis を用いて作られる measure の一意性は自明である。

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) &= \sum_k \bar{c}_k \bar{v}_k(x) \quad , \quad \bar{v}_k(x)P_+ = \bar{v}_k(x) \\ D(\bar{\psi}) &= \prod_j d\bar{c}_j \end{aligned} \quad (2.22)$$

従って、basis  $v_j$  の gauge 依存性を調べるのが重要となる。けれども、この問題をまともに取り扱い、一意性を調べるのは困難である。

そこで以下の議論では、このような一意的な  $v_j$  が存在すると仮定して、fermion path integral の性質について調べていく。すると、ある local current が存在して、この current(measure current) を扱うことにより、measure の一意性の問題が幾何学的に理解できることがわかる。

### 2.3.2 measure term の定義

以下、instanton などの存在しない zero topological sector で考える。今、gauge 場に対して一意的な  $v_j$  が存在したとする。Grassmann 変数  $c_j$  は gauge 場と独立に選べるので、fermion path integral は直ちに実行でき、次の determinant で表すことができる。

$$\begin{aligned} \langle 1 \rangle_F &\equiv \int D[\psi]D[\bar{\psi}]e^{-S_F} = \det M \\ M_{kj} &= a^4 \sum_{x,y} \bar{v}_k(x)D(x,y)v_j(x) \end{aligned} \quad (2.23)$$

ここで gauge 場の変分を考えよう。

$$\delta_\eta U_\mu(x) = a\eta_\mu(x)U_\mu(x) \quad , \quad \eta_\mu(x) = \eta_\mu^a(x)T^a \quad (2.24)$$

ただし  $T^a$  は群の生成子を表す反エルミート演算子である。この変分のもとで determinant は次のように変換される。

$$\begin{aligned}
\delta_\eta \ln \det M &= Tr(\delta_\eta M M^{-1}) \\
&= a^4 \left\{ \sum_x \bar{v}_k(x) (\delta_\eta D) v_j(x) \right\} M_{jk}^{-1} \\
&\quad + a^4 \left\{ \sum_x \bar{v}_k(x) D \delta_\eta v_j(x) \right\} M_{jk}^{-1} \\
&= \sum_{jk} \sum_{x,x',y,y'} \bar{v}_k(x) \delta_\eta D(x,x') v_j(x') v_j^\dagger(y) D^{-1}(y,y') \bar{v}_k^\dagger(y') \\
&\quad + \sum_{jk} \sum_{x,x',y,y'} \bar{v}_k(x) D(x,x') \delta_\eta v_j(x') v_j^\dagger(y) D^{-1}(y,y') \bar{v}_k^\dagger(y') \\
&= \sum_{x,x'} \sum_{y,y'} tr \left\{ \delta_\eta D(x,x') \hat{P}_-(x',y) D^{-1}(y,y') P_+ \delta_{y'x} \right\} \\
&\quad + \sum_{jk} \sum_{x,x',y,y'} tr \left\{ D(x,x') \delta_\eta v_j(x') v_j^\dagger(y) D^{-1}(y,y') P_+ \delta_{y'x} \right\} \\
&= Tr[\delta_\eta D \hat{P}_- D^{-1}] + \sum_j (v_j, \delta_\eta v_j) \tag{2.25}
\end{aligned}$$

ただし,  $tr$  は Dirac 行列と群の表現行列の trace を表し,  $Tr$  は空間座標についても足しあげることの意味する。また上の計算過程において, 次の各等式を利用した。

$$\begin{aligned}
\sum_j v_j(x) v_j^\dagger(y) &= \hat{P}_-(x,y) \\
&= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \delta_{xy} + \frac{a}{2} \gamma_5 D(x,y) \\
\sum_j \bar{v}_j(x) \bar{v}_j^\dagger(y) &= P_+ \delta_{xy} \\
M_{jk}^{-1} &= a^{-4} \sum_{xy} v_j^\dagger(x) D^{-1}(x,y) \bar{v}_k^\dagger(y) \\
D^{-1} P_+ &= \hat{P}_- D^{-1}
\end{aligned}$$

ここで次の量を定義しよう。

$$\mathcal{L}_\eta \equiv i \sum_j (v_j, \delta_\eta v_j) \tag{2.26}$$

この  $\mathcal{L}_\eta$  を measure term とよぶことにする。これを用いて式 (2.25) は次のように表せる。

$$\delta_\eta \ln \det M = Tr[\delta_\eta D \hat{P}_- D^{-1}] - i \mathcal{L}_\eta \tag{2.27}$$

measure term は式 (2.21) の basis の変換の下で次のように変換する。

$$\tilde{\mathcal{L}}_\eta = \mathcal{L}_\eta - i \delta_\eta \ln \det Q \tag{2.28}$$

この関係式をみると、 $\det Q = 1$  のとき、 $\tilde{\mathcal{L}}_\eta = \mathcal{L}_\eta$  となることがわかる。このため、 $v_j$  そのものよりもこの  $\mathcal{L}_\eta$  を扱った方が見通しがよいのである。

さらに理論の局所性より、次を満たす local current  $j_\mu(x)$  が存在すると仮定できる。

$$\mathcal{L}_\eta = a^4 \sum_{x,\mu,a} \eta_\mu^a(x) j_\mu^a(x) \quad (2.29)$$

これが measure current である。

### 2.3.3 gauge anomaly

この節では理論の gauge 不変性を調べよう。次のような無限小 gauge 変換を考える。

$$\begin{aligned} \delta_\eta U_\mu(x) &= a \eta_\mu(x) U_\mu(x) \quad , \quad \eta_\mu = -\nabla_\mu \omega \\ \nabla_\mu \omega(x) &= \frac{1}{a} [U_\mu(x) \omega(x + a\hat{\mu}) U_\mu^{-1}(x) - \omega(x)] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Dirac 演算子は次のように変換する。

$$\delta_\eta D = [R(\omega), D] \quad (2.31)$$

これらを用いると fermion determinant は次のように変換することがわかる。

$$\begin{aligned} \delta_\eta \ln \det M &= \text{Tr}[R(\omega), D] \hat{P}_- D^{-1} P_+ + i a^4 \sum_x (\nabla_\mu \omega(x))^a j_\mu^a(x) \\ &= i a^4 \sum_x \omega^a(x) \{ \text{tr}[R(T^a) D \hat{P}_- D^{-1} P_+ - R(T^a) \hat{P}_- D^{-1} P_+ D] \\ &\quad - [\nabla_\mu^* j_\mu]^a(x) \} \\ &= i a^4 \sum_x \omega^a(x) \{ A^a(x) - [\nabla_\mu^* j_\mu]^a(x) \} \end{aligned} \quad (2.32)$$

つまり、gauge 不変であるためには、

$$[\nabla_\mu^* j_\mu]^a(x) = A^a(x) \quad (2.33)$$

でなければならない。これは連続理論における anomalous Ward identity に相当する。ただし、

$$A^a(x) = i \frac{a}{2} \text{tr} \{ \gamma_5 R(T^a) D(x, x) \} \quad (2.34)$$

と定義した。実は、これは連続理論の anomaly に対応した量である。実際に  $a \rightarrow 0$  極限をとってみよう。まず、link 変数は連続理論の gauge potential  $A_\mu$  を用いて次のように表される。

$$U_\mu(x) = \mathcal{P} \exp \int \left\{ a \int_0^1 dt A_\mu(x + (1-t)\hat{\mu}a) \right\} \quad (2.35)$$

$\mathcal{P}$  は path ordering をとることを意味する。anomaly を次のように展開しよう。

$$A^a(x) \sim_{a \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} a^{k-4} O_k^a(x) \quad (2.36)$$

ただし、 $O_k^a(x)$  は、次元  $k$  で  $A_\mu$  の関数である。さて、式 (2.34) の対称性を考慮すると、 $O_k^a(x)$  の形は制限されることがわかる。まず、gauge 共変性より、 $O_k^a(x)$  は  $F_{\mu\nu}$  の関数であることがわかる。よって  $k$  は偶数。次に、parity は奇であることから、 $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  との縮約が必要。よって  $k \geq 4$ 。そして、複素共役をとると、負になることから、群の生成子  $R(T^a)$  は奇数次で対称な trace として現れなければならない。以上のことから anomaly の最低次の項の形は完全に決まり、さらに、係数も連続理論と一致するはずなので厳密に決まる。anomaly は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} A^a(x) &= -\frac{1}{128\pi^2} d_R^{abc} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b(x) F_{\rho\sigma}^c(x) + O(a) \\ d_R^{abc} &= 2i \text{tr}[R(T^a)\{R(T^b)R(T^c) + R(T^c)R(T^b)\}] \end{aligned} \quad (2.37)$$

従って連続理論のときのように、 $d_R^{abc} = 0$  ならば理論の gauge 不変性が保証されているように予想できる。しかし、これはあくまで  $a \rightarrow 0$  極限での話である。 $O(a)$  の寄与の有無は自明ではない。

$a$  が有限のまま anomaly を議論しなければならないということが、格子上の chiral gauge theory の定式化を困難なものにしている。連続理論において anomaly は多くの幾何学的な性質を持っていた。格子理論では時空を離散化してしまっているので、そのような幾何学的アプローチは難しいのである。

### 2.3.4 積分可能条件

次に、(2.25) 式の変分を積み重ねた有限変換を考え、fermion determinant の積分可能性を議論しよう。gauge 場の field space 上で、次のような 1-parameter family を考える。

$$U_\mu^t(x) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2.38)$$

gauge 場に対して measure が一意に存在するならば、次の量は一意に存在するはずである。

$$W \equiv \exp\left(i \int_0^1 dt \mathcal{L}_\eta\right) \quad , \quad a\eta_\mu(x) = \partial_t U_\mu^t(x) U_\mu^t(x)^{-1} \quad (2.39)$$

この量を詳しく見ていこう。まず、次の微分方程式の解となる unitary 演算子  $Q_t$  を定義する。

$$\partial_t Q_t = [\partial_t P_t, P_t] Q_t \quad , \quad Q_0 = 1 \quad (2.40)$$

ただし,  $P_t = \hat{P}_-|_{U=U^t}$  としている。このとき,

$$\begin{aligned}\partial_t(Q_t^{-1}P_tQ_t) &= -Q_t^{-1}[\partial_tP_t, P_t]P_tQ_t + Q_t^{-1}\partial_tP_tQ_t + Q_t^{-1}P_t[\partial_tP_t, P_t]Q_t \\ &= Q_t^{-1}\{-\partial_tP_tP_t - P_t\partial_tP_t + \partial_tP_t\} \\ &= 0\end{aligned}\tag{2.41}$$

となるので, 次の等式が得られる。

$$P_t = Q_tP_0Q_t^{-1}\tag{2.42}$$

さて, 任意の loop に対して,  $W$  は次のように表現できなければならない。

$$W|_{loop\ path} = \det\{1 - P_0 + P_0Q_1\}\tag{2.43}$$

この式は積分可能条件とよばれるものである。(実際, gauge 場の有限変換に対して fermion determinant が一意的に与えられることが次節でわかる。)

**証明** local な current  $j_\mu$  を用いて与えられた式 (2.39) の  $\mathcal{L}_\eta$  は, 次の  $\mathcal{L}'_\eta$  と等価でなければならない。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_\eta &= i \sum_j (v_j^t, \partial_t v_j^t) \\ P_t v_j^t &= v_j^t\end{aligned}\tag{2.44}$$

ただし,  $v_j^t$  は, gauge 場が  $\{U_\mu^t\}$  で与えられたときの basis である。このとき,

$$P_t v_j^t = Q_t P_0 Q_t^{-1} v_j^t\tag{2.45}$$

と表せるので,  $v_j^t$  と  $v_j^0$  は次の関係になっていることがわかる。

$$v_j^t = Q_t v_i^0 (S^{-1})_{ij}\tag{2.46}$$

ただし,  $S^{-1}$  は unitary 行列である。これを式 (2.44) に代入してみよう。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_\eta &= i \sum_j (v_j^t, \partial_t v_j^t) \\ &= itr P_t (Q_t^{-1} \partial_t Q_t) + itr (S \partial_t S^{-1}) \\ &= itr \{P_t (Q_t^{-1} [\partial_t P_t, P_t])\} - itr (\partial_t S S^{-1}) \\ &= -i \partial_t \ln \det_{L_t} S\end{aligned}\tag{2.47}$$

ここで  $\det_{L_s}$  は,  $t = s$  での left hand の部分空間でとった determinant を表す。これより,

$$W = \det_{L_1} S\tag{2.48}$$

が得られる。さて、 $U_\mu^1 = U_\mu^0$  となる *loop* を考えよう。すると、

$$\begin{aligned} v_j^{t=1} S_{ji} &= Q_1 \sum_l v_l^{t=0} (S^{-1})_{lj} S_{ji} \\ &= Q_1 v_i^{t=0} \end{aligned} \quad (2.49)$$

より、

$$\begin{aligned} (Q_1 v^0)_i &= (v^0 S)_i \\ \det_{L_0} S &= \det_{L_0} Q_1 \\ &= \det(1 - P_0 + P_0 Q_1) \end{aligned} \quad (2.50)$$

が得られる。証明終。

さて、これまでは gauge 場に対して一意的な measure が存在すれば、式 (2.43) が積分可能条件として与えられることを示したが、逆に、式 (2.43) を満たす current  $j_\mu$  が存在するとき、一意的な measure が与えられることを証明することができる。これについて見ていこう。

ある topological sector における配位  $U^0$  をとり、この配位における basis を  $\{w_j\}$  としよう。ここで同じ sector の配位  $U^1$  へのなめらかな変化を考える。current  $j_\mu$  が式 (2.43) の積分可能条件を満たすとき、この配位における measure を定義する basis  $\{v_j\}$  は、次のように与えればよい。

$$v_j = Q_1 w_j W^{-1/N} \quad (2.51)$$

ただし、 $N$  は全自由度である。

さて、このようにして与えられた  $\{v_j\}$  が適切なものかどうかを確かめるために、projection 演算子をかけてみよう。

$$\begin{aligned} \hat{P}_-|_{U=U^1} v_j = P_1 v_j &= Q_1 P_0 Q_1^{-1} Q_1 w_j W^{-1/N} \\ &= Q_1 P_0 w_j W^{-1/N} \\ &= v_j \end{aligned} \quad (2.52)$$

ここで式 (2.42) を利用した。 $W$  の役割については次節で明らかになる。このように、式 (2.43) を満たす current  $j_\mu$  と measure は、1 対 1 で対応していることがわかる。chiral gauge theory の構成の問題は、必要な性質を満たす  $j_\mu$  を構成する問題に帰結できるのである。

$j_\mu$  が満たすべき条件は、

- gauge 不変性
- anomalous Ward identity : 式 (2.33)
- 積分可能条件 : 式 (2.43)

- axial vector であること
- local な量であること

の5つである。

## 2.4 Fermion determinant の計算と連続理論との対応

前節では determinant の変分を考え、measure current  $j_\mu$  の満たすべき性質について議論した。この節では前節の結果を用いて、式 (2.27) の変分した量を積分することにより、fermion determinant を具体的に計算する。すると、 $j_\mu$  が必要な条件を満たしていれば、determinant は、積分の path に全く依存しないことがわかる。また、積分可能条件の微分形も求め、measure term と連続理論の anomaly との対応について詳しく調べる。

### 2.4.1 computation of fermion determinant

さて、measure current  $j_\mu$  が与えられたとして、fermion determinant を計算しよう。 $(j_\mu$  は、積分可能性など、全ての必要な条件を満たしているものとする。)measure の寄与は、gauge 場の配位の違うときの相対的な phase のみに意味があるので、ある配位における fermion determinant と別の配位の determinant との関係は、一意的に与えることができれば充分である。

先に結果を示す。

$$\det M_1 = \frac{\det(1 - P_+ + P_+ D_1 Q_1 D_0^\dagger) W^{-1}}{\det M_0^\dagger} \quad (2.53)$$

ただし、gauge 場の配位が  $U^0$  のときの determinant および Dirac 演算子を  $(\det M_0, D_0)$  とし、gauge 場の配位が  $U^1$  のときの determinant および Dirac 演算子を  $(\det M_1, D_1)$  としている。

式 (2.53) を示すために、次の bra ベクトル、ket ベクトルを導入すると便利である。

$$\begin{aligned} v_j^\dagger(x) &= \langle x | j_{t,L} \rangle \quad , \quad P_t | j_{t,L} \rangle = | j_{t,L} \rangle \\ \bar{v}_j(x) &= \langle j_R | x \rangle \quad , \quad \langle j_R | P_+ = \langle j_R | \\ D_t(x, y) &= \langle x | D_t | y \rangle \end{aligned} \quad (2.54)$$

$\bar{v}_j$  の方は  $t$  依存性がないことに注意。さらに、式 (2.51) より、 $| j_{t,L} \rangle$  は  $| j_{0,L} \rangle$  を用いて次のように表せる。

$$| j_{t,L} \rangle = Q_t | j_{0,L} \rangle W^{-1/N} \quad (2.55)$$

これらを用いて、次の行列を計算できる。

$$\begin{aligned} (M_1 M_0^\dagger)_{ij} &= \langle i_R | x \rangle \langle x | D_1 | x' \rangle \langle x' | k_{1,L} \rangle \langle k_{0,L} | y \rangle \langle y | D_0^\dagger | y' \rangle \langle y' | j_R \rangle \\ &= \langle i_R | D_1 Q_1 D_0^\dagger | j_R \rangle W^{-1/N} \end{aligned} \quad (2.56)$$

よって、この行列の determinant は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \det(M_1 M_0^\dagger) &= \det_R(D_1 Q_1 D_0^\dagger) W^{-1} \\ &= \det(1 - P_+ + P_+ D_1 Q_1 D_0^\dagger) W^{-1} \end{aligned} \quad (2.57)$$

ここで  $\det_R$  は right hand の部分空間でとった determinant を表す。こうして式 (2.53) を示すことができた。さらに、式 (2.57) で、 $M_1$  と  $M_0^\dagger$  をかける順を逆にして計算すると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} \det(M_0^\dagger M_1) &= \det_{L_0}(D_0^\dagger D_1 Q_1) W^{-1} \\ &= \det_{L_0}(D_0^\dagger D_1) \det_{L_0} Q_1 W^{-1} \end{aligned} \quad (2.58)$$

ここで  $\det_{L_0}$  は、 $t = 0$  での left hand の部分空間でとった determinant を表す。

さて、 $W$  はどんな役割を果たしているか考えよう。実は、右辺の determinant の path 依存性を相殺している counter term になっていることがわかる。端点の等しい 2 つの path  $c_1, c_2$  で比較しよう。

$$\begin{aligned} \det(M_0^\dagger M_1)|_{c_1} &= \det_{L_0}(D_0^\dagger D_1) \det_{L_0} Q_1 W^{-1}|_{c_1} \\ \det(M_0^\dagger M_1)|_{c_2} &= \det_{L_0}(D_0^\dagger D_1) \det_{L_0} Q_1 W^{-1}|_{c_2} \end{aligned} \quad (2.59)$$

この両式は等しいだろうか？これは 2 つの determinant の比をとると明らかになる。

$$\begin{aligned} \frac{\det(M_0^\dagger M_1)|_{c_1}}{\det(M_0^\dagger M_1)|_{c_2}} &= \frac{\det_{L_0} Q_1 W^{-1}|_{c_1}}{\det_{L_0} Q_1 W^{-1}|_{c_2}} \\ &= \det_{L_0} Q_1|_{c_1-c_2} W^{-1}|_{c_1-c_2} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (2.60)$$

最後の等式は、path  $c_1 - c_2$  が loop になっているので、式 (2.43) より、 $W = \det_{L_0} Q_1$  になることからわかる。よって  $W^{-1}$  が counter term として働くことにより、2 つの determinant の関係式 (2.53) は一意的に与えられるのである。

#### 2.4.2 classical continuum limit

この節では、必要な条件を満たす measure current  $j_\mu$  が、古典的な連続極限でどのように与えられるかを議論する。そのために、積分可能条件の微分

形を求めよう。まず，次の式が成り立つことに注目する。

$$\delta_\eta \delta_\zeta - \delta_\zeta \delta_\eta + a \delta_{[\eta, \zeta]} = 0 \quad (2.61)$$

これを式 (2.27) に作用させると，次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \delta_\eta \mathcal{L}_\zeta - \delta_\zeta \mathcal{L}_\eta + a \mathcal{L}_{[\eta, \zeta]} &= i \text{Tr} \{ \delta_\eta D \delta_\zeta D^{-1} P_+ - \delta_\zeta D \delta_\eta D^{-1} P_+ \} \\ &= i \text{Tr} \{ \hat{P}_- [\delta_\eta \hat{P}_-, \delta_\zeta \hat{P}_-] \} \end{aligned} \quad (2.62)$$

これが微分形の (局所的な) 積分可能条件である。この条件は，式 (2.43) の大域的な積分可能条件よりも弱い条件である。実際，式 (2.62) を満たすものが式 (2.43) を満たさない例も SU(2) 理論で知られている。そして，これは Witten の global anomaly [18][19] に対応していることが示された [20]。つまり，式 (2.43) の大域的な積分可能条件は global anomaly も許さない条件になっているのである。

さて，式 (2.62) の連続極限を考えよう。右辺は次のように展開できる。

$$i \text{Tr} \{ \hat{P}_- [\delta_\eta \hat{P}_-, \delta_\zeta \hat{P}_-] \} \sim_{a \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} a^{k-4} \int d^4 x R_k(x) \quad (2.63)$$

ただし， $R_k(x)$  は次元  $k$  の演算子。2.3.3 節の anomaly の連続極限と同様のやり方で対称性を考慮すると，次のようになることがわかる。

$$i \text{Tr} \{ \hat{P}_- [\delta_\eta \hat{P}_-, \delta_\zeta \hat{P}_-] \} = c \int d^4 x d_R^{abc} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \eta_\mu^a(x) \zeta_\nu^b(x) F_{\rho\sigma}^c(x) + O(a) \quad (2.64)$$

ただし， $c$  は定数。さらに， $\eta_\mu(x) = -\nabla_\mu \omega(x)$  とすると，

$$i \text{Tr} \{ \hat{P}_- [\delta_\eta \hat{P}_-, \delta_\zeta \hat{P}_-] \} = -a^4 \sum_x \omega^a(x) \delta_\zeta A^a(x) \quad (2.65)$$

となるので，式 (2.37) より，

$$c = \frac{1}{32\pi^2} \quad (2.66)$$

であることがわかる。

さて，anomaly free のとき，積分可能条件の右辺は  $O(a)$  になることに注意しよう。このとき  $a \rightarrow 0$  極限で， $j_\mu \rightarrow 0$  となり，連続理論の場合と一致するのである。

## 2.5 local cohomology problem

以上の結果から，必要な条件を満たす  $j_\mu$  を構成することができれば，それを用いて measure が得られ，chiral gauge theory が定式化できることがわかった。さて， $j_\mu$  はどのように構成できるのだろうか？ 実はこの問題は群が U(1) の場合を除いて，未解決である。しかし，U(1) の chiral gauge theory

の定式化に成功した Lüscher のアプローチにより、課題の輪郭は明瞭になりつつある。それは、離散化された lattice 空間にも cohomology 的なものを導入して議論するという方法である。([21] などが参考になる。)

格子上の cohomology を議論する前に、連続理論での topological field について復習しよう。

ある  $R^n$  上の gauge 不変な field  $q(x)$  を考える。この  $q(x)$  が任意の (有限な範囲での) 変分に対して、次の性質を満たすとき、 $q(x)$  は topological field であるという。

$$\int d^n x \delta q(x) = 0 \quad (2.67)$$

Stora-Zumino の降下方程式を使うと、topological field は、次の形に書くことが証明できる [22][23][24]。

$$q(x) = c(z) + \partial_\alpha k_\alpha(x) \quad (2.68)$$

ただし、 $c(z)$  は、Chern 単項式の線形結合で、 $k_\alpha$  は gauge 不変な local current である。Chern 単項式の一般形は次のとおり。

$$c_{\alpha_1 \dots \alpha_{2m}} t^{a_1 \dots a_m} F_{\alpha_1 \alpha_2}^{a_1} (z) \dots F_{\alpha_{2m-1} \alpha_{2m}}^{a_m} (z) \quad (2.69)$$

ただし、 $c_{\alpha_1 \dots \alpha_{2m}}$  は完全反対称で、 $t^{a_1 \dots a_m}$  は adjoint な gauge 変換に対して不変。

連続理論においては、anomaly は topological field であり、cohomology の議論から、anomaly free なとき、 $c(z) = 0$  が示される。

さて、同様のことが格子上でも議論できるだろうか? 連続理論のときにならって 5 次元目、6 次元目の gauge 場を導入すると、連続理論における 6 次元の chiral anomaly に対応する量が、topological field になっていることがわかる。まず、これを見ていこう。

5 次元方向  $t$ 、6 次元方向  $s$  は連続にとる。4 次元格子上の link 変数を次のように拡張しよう。

$$U_\mu(x) \rightarrow U_\mu(z) \quad , \quad z = (x, t, s) \quad (2.70)$$

さらに、5 次元、6 次元方向の gauge 場を導入。

$$\begin{aligned} A_t(z) \quad , \quad A_s(z) \\ F_{ts}(z) &= \partial_t A_s(z) - \partial_s A_t(z) + [A_t(z), A_s(z)] \end{aligned} \quad (2.71)$$

5 次元、6 次元方向の共変微分は次のようになる。

$$\begin{aligned} D_r^A U_\mu(z) &= \partial_r U_\mu(z) + A_r(z) U_\mu(z) - U_\mu(z) A_r(z + \hat{\mu} a) \\ D_r^A \hat{P}_- &= \partial_r \hat{P}_- + [R(A_r), \hat{P}_-] \quad (r = t, s) \end{aligned} \quad (2.72)$$

ここで、次の gauge 不変な量を考えよう。

$$q(z) = -i \text{tr} \left\{ \left[ \frac{1}{4} \{ \hat{\gamma}_5, [D_t^A \hat{P}_-, D_s^A \hat{P}_-] \} + \frac{1}{2} R(F_{ts}) \hat{\gamma}_5 \right] (x, x) \right\} \quad (2.73)$$

この  $q(z)$  は、連続極限で 6 次元 chiral anomaly に対応している。

$$q(z) = \frac{1}{6} c_1 d_R^{abc} \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_6} F_{\alpha_1 \alpha_2}^a(z) F_{\alpha_3 \alpha_4}^b(z) F_{\alpha_5 \alpha_6}^c(z) + O(a) \quad (2.74)$$

ただし、 $c_1 = -1/128\pi^2$ 。さらに、 $q(z)$  は、topological field になっている。

$$a^4 \sum_x \int dt ds \delta q(z) = 0 \quad (2.75)$$

$\delta q(z)$  は gauge 場に関する任意の local な変分。証明は Appendix C 参照。

こうして、 $q(z)$  は連続理論の 6 次元 chiral anomaly に対応している量で、topological であることもわかった。さて、 $q(z)$  は式 (2.68) を差分化したもので書けるだろうか? この問題は lattice 上で cohomology を扱うことができれば、可能だと考えられているが、群が U(1) 以外の場合では成功していない。しかし、ここで anomaly free のとき、 $q(z)$  は次のように書けると仮定してみよう。

$$q(z) = \partial_\mu^* k_\mu(z) + \partial_t k'_t(z) + \partial_s k'_s(z) \quad (2.76)$$

このとき、必要な条件を満たす  $j_\mu$  が存在することを証明できる。実際  $j_\mu$  を求めてみよう。はじめにもとの  $q(z)$  の定義にそって  $k_\mu$  を定義しなおしておいた方が見通しがよい。

$$\begin{aligned} k'_t &= k_s \quad , \quad k'_s = -k_t \\ q(z) &= \partial_\mu^* k_\mu(z) + \partial_t k_s(z) - \partial_s k_t(z) \end{aligned} \quad (2.77)$$

$k_\mu, k_t, k_s$  は  $U_\mu(z), A_r(z)$  とその  $(t, s)$  微分から成る場である。ここで、gauge 不変性と、次元解析より、 $k_t, k_s$  は次の形になることがわかる。

$$\begin{aligned} k_r(z) &= a^4 \sum_y \lambda_{r,\mu}^a(w) K_{r,\mu}^a(w, z) \quad , \quad w = (y, t, s) \\ a \lambda_{r,\mu}(w) &= D_r^A U_\mu(w) U_\mu(w)^{-1} \quad , \quad r = t, s \end{aligned} \quad (2.78)$$

$K_{r,\mu}^a(w, z)$  は gauge 共変な量であり、link 変数のみの関数である。

ここで  $x$  について足し上げると、式 (2.73)、式 (2.76) より、次の等式が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_x q(x, t, s) &= a^4 \sum_y \{ \partial_t [\lambda_{s,\mu}^a j_{s,\mu}^a] - \partial_s [\lambda_{t,\mu}^a j_{t,\mu}^a] \} \\ &= i \text{Tr} \left\{ \hat{P}_- [D_t^A \hat{P}_-, D_s^A \hat{P}_-] - \frac{1}{2} R(F_{ts}) \hat{\gamma}_5 \right\} \end{aligned} \quad (2.79)$$

ただし,

$$j_{r,\mu}^a(w) = a^4 \sum_x K_{r,\mu}^a(w, z) \quad , \quad r = t, s \quad (2.80)$$

ここで, 式 (2.79) の両辺を比べると,  $\partial_t \partial_s U_\mu(w)$  に比例する項は左辺にしかないことがわかるので, 次が結論できる。

$$j_{t,\mu}(w) = j_{s,\mu}(w) \equiv j_\mu(w) \quad (2.81)$$

この  $j_\mu(w)$  は,  $(t, s)$  依存性がないとき, 必要な条件を満たす measure current になっている。

まず, anomalous Ward identity を確かめよう。link 変数は  $(t, s)$  に依らないとする。このとき, 式 (2.79) の左辺は,

$$\begin{aligned} LHS &= -2a^4 \sum_x [\partial_t \text{tr}(\lambda_{s,\mu} j_\mu(x)) - \partial_s \text{tr}(\lambda_{t,\mu} j_\mu(x))] \\ &= -2a^4 \sum_x \left[ \partial_t \text{tr} \left( \frac{1}{a} D_s^A U_\mu(x) U_\mu(x)^{-1} j_\mu(x) \right) \right. \\ &\quad \left. - \partial_s \text{tr} \left( \frac{1}{a} D_t^A U_\mu(x) U_\mu(x)^{-1} j_\mu(x) \right) \right] \\ &= 2a^4 \sum_x \text{tr} [\nabla_\mu (\partial_t A_s(x, t, s)) j_\mu(x) \\ &\quad - \nabla_\mu (\partial_s A_t(x, t, s)) j_\mu(x)] \end{aligned} \quad (2.82)$$

となり, 右辺は

$$RHS = iTr \left\{ \hat{P}_- [[A_t, \hat{P}_-], [A_s, \hat{P}_-]] - \frac{1}{2} (\partial_t A_s - \partial_s A_t + [A_t, A_s]) \hat{\gamma}_5 \right\} \quad (2.83)$$

となる。さらにここで, すべての  $z$  について  $A_t(z) = 0$  としよう。すると,

$$\begin{aligned} LHS &= -2a^4 \sum_x \text{tr} [(\partial_t A_s) \nabla_\mu^* j_\mu(x)] \\ &= a^4 \sum_x (\partial_t A_s)^a (\nabla_\mu^* j_\mu(x))^a \\ RHS &= -\frac{i}{2} a^4 \sum_x \text{tr} (\partial_t A_s \hat{\gamma}_5) \\ &= \frac{i}{2} a^5 \sum_x (\partial_t A_s)^a \text{tr} (\gamma_5 T^a D(x, x)) \\ &= a^4 \sum_x (\partial_t A_s)^a A^a(x) \end{aligned} \quad (2.84)$$

となって, anomalous Ward identity が得られる。

$$(\nabla_\mu^* j_\mu(x))^a = A^a(x) \quad (2.85)$$

次に、積分可能条件を満たすことを確かめよう。今度はすべての  $z$  について  $A_t(z) = 0, A_s(z) = 0$  とおく。このとき、式 (2.79) の両辺は、

$$\begin{aligned}
LHS &= -2a^4 \sum_x [\partial_t \{\lambda_{s,\mu} j_\mu(x)\} - \partial_s \{\lambda_{t,\mu} j_\mu(x)\}] \\
&= -2a^3 \sum_x \text{tr} [(\partial_s U_\mu \partial_t U_\mu^{-1} - \partial_t U_\mu \partial_s U_\mu^{-1}) j_\mu(x) \\
&\quad + \partial_s U_\mu U_\mu^{-1} \partial_t j_\mu(x) - \partial_t U_\mu U_\mu^{-1} \partial_s j_\mu(x)] \\
&= -2a^4 \sum_x \text{tr} \{a[\eta_{s,\mu}, \eta_{t,\mu}] j_\mu(x) + \eta_{s,\mu} \partial_t j_\mu - \eta_{t,\mu} \partial_s j_\mu\} \\
RHS &= i \text{Tr} \hat{P}_- [\partial_t \hat{P}_-, \partial_s \hat{P}_-] \tag{2.86}
\end{aligned}$$

となり、積分可能条件が得られる。

$$\delta_{\eta_s} \mathcal{L}_{\eta_t} - \delta_{\eta_t} \mathcal{L}_{\eta_s} + a \mathcal{L}_{[\eta_s, \eta_t]} = i \text{Tr} \{\hat{P}_- [\delta_{\eta_s} \hat{P}_-, \delta_{\eta_t} \hat{P}_-]\} \tag{2.87}$$

こうして、式 (2.76) が成り立つとき、格子上で chiral gauge 理論が構成できることがわかる。ただし、式 (2.43) の大域的な積分可能条件が満たされているかどうかを確かめる必要がある。

## 2.6 まとめ、および今後の課題と展望

以上の議論をまとめよう。格子上の chiral gauge 理論は、次の条件を満たす measure current  $j_\mu$  を構成することにより実現されることがわかった。

- gauge 不変性
- anomalous Ward identity :

$$[\nabla_\mu^* j_\mu]^a(x) = A^a(x) \tag{2.88}$$

- 積分可能条件 :

$$W|_{\text{loop path}} = \det\{1 - P_0 + P_0 Q_1\} \tag{2.89}$$

- axial vector であること
- local な量であること

そして、これらの条件を満たす  $j_\mu$  は、4+2次元の chiral anomaly  $q(x)$  が、次の形のときに得られることがわかった。

$$q(z) = \partial_\mu^* k_\mu(z) + \partial_t k'_t(z) + \partial_s k'_s(z) \tag{2.90}$$

よって、残されている課題は、格子上の topological field の分類である。そして、fermion の表現が、anomaly free なとき、式 (2.90) のようになることが証明できれば完成である。

連続理論では cohomology を用いて topological field を分類できた。格子上でも cohomology のようなものを導入して解決できるのではないかと考えられている。

実際、群が  $U(1)$  の場合、格子上で Poincaré の補題に対応するものが Lüscher によって発見され、それを用いることで 4 次元無限体積格子においても、有限体積格子においても、chiral gauge 理論が構成できることが示された。群が NonAbelian の場合は、field strength と plaquette が 1 対 1 で対応していないので、今のところ cohomology を議論することは難しい。

しかし、admissibility により、連続理論の幾何学的性質がよく保たれることが発見され、さらに  $U(1)$  では cohomology の議論に成功したこともあり、決して不可能な課題ではないと考えられる。また、摂動的には、anomaly free のとき、all order で式 (2.76) が実現されることが証明されている [25]。このことから、さらなる発展、解決が期待される。

また、格子上の chiral gauge 理論が定式化に理論的に成功したとしても、それが実際数値計算可能であるか否かは別問題である。実際、Lüscher のアプローチによる  $U(1)$  の理論は、まだ計算可能なものではない。これは連続パラメータによる積分を計算機が実行できないことと関連している。そのほかにも技術的な課題は多い。定式化された  $U(1)$  理論や、これから成功するかもしれない理論をどう数値計算可能にするかといった議論も、今後重要になると考えられる。

### 3 無限体積格子上の Chiral $U(1)$ 理論

admissibility condition は、Dirac 演算子の局所性を保証するだけでなく、measure current  $j_\mu$  を構成する上でも重要な役割を果たすと考えられる。実際、Lüscher は admissibility を課した action を用いることで、格子 chiral  $U(1)$  理論の構成に成功した。admissibility を課すことで、 $U(1)$  の gauge 場を、 $A_\mu(x)$  という連続理論のベクトルポテンシャルに対応した量で表現できるようになる。この量を用いて無限体積の格子上における cohomology の議論から anomaly の形を分類し、anomaly free のとき、実際に  $j_\mu$  が構成できるのである。

ここでは、 $U(1)$  理論における measure current の構成法を学び、admissibility condition の役割を見ていく。

### 3.1 無限体積格子における cohomology

U(1) 理論の特徴として, global な chiral 変換に対する chiral anomaly と, 局所的な chiral 変換に対する chiral gauge anomaly の形が等しいということが挙げられる。つまり, chiral gauge anomaly を調べるかわりに, chiral anomaly の性質を調べればよい。chiral anomaly は, 4次元格子上での topological field である。このことで 4+2 次元に拡張する必要がなくなり, cohomology も 4次元の格子上で議論すればよいことがわかる [16]。

Lüscher は 4次元無限体積格子において, Poincaré の補題に相当するものが成り立つことを示した。これを確かめていこう。

まず, 格子上で微分形式に相当するものを定義する。無限体積格子上の  $k$ -form は, 次のように与えられる。(  $a = 1$  とする。 )

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{k!} f_{\mu_1 \dots \mu_k}(x) dx_{\mu_1} \dots dx_{\mu_k} \\ dx_{\mu} dx_{\nu} &= -dx_{\nu} dx_{\mu} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$k$ -form 全体の空間を  $\Omega_k$  と表すことにする。外微分は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} d &: \Omega_k \rightarrow \Omega_{k+1} \\ df(x) &= \frac{1}{k!} \partial_{\mu} f_{\mu_1 \dots \mu_k}(x) dx_{\mu} dx_{\mu_1} \dots dx_{\mu_k} \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここで  $f_{\mu_1 \dots \mu_k}$  は完全反対称テンソルである。  $\partial_{\mu}$  は前方差分演算子であって, 微分ではないことに注意しよう。随伴外微分も次のように与えられる。

$$\begin{aligned} d^* &: \Omega_k \rightarrow \Omega_{k-1} \\ d^* f(x) &= \frac{1}{(k-1)!} \partial_{\mu}^* f_{\mu \mu_2 \dots \mu_k}(x) dx_{\mu_2} \dots dx_{\mu_k} \end{aligned} \quad (3.3)$$

反対称性より, これらの演算子のべきゼロ性はすぐにわかる。

$$d^2 = 0 \quad , \quad d^{*2} = 0 \quad (3.4)$$

この差分化された微分形式について, 次の補題が成り立つ。

**Lemma 1 (Poincaré の補題)**  $n$ 次元無限体積格子上の  $k$ -form  $f$  が,

$$\begin{aligned} df(x) = 0, \quad f(x) \rightarrow 0 \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty \\ \sum_x f(x) = 0 \quad \text{if } k = n \end{aligned}$$

の条件を満たすとき,

$$f(x) = dg(x) \quad g(x) \rightarrow 0 \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty \quad (3.5)$$

となる  $g(x)$  が存在する。

**証明**  $n = 1$  で成り立つことを示し、帰納的に  $n > 1$  でも成り立つことを証明する。

1次元では、0-form と 1-form しかない。 $f(x) \rightarrow 0$  as  $|x| \rightarrow \infty$  の条件を満たす 0-form は、 $f = 0$  のみで自明。1-form は  $n = 1$  なので次の条件を満たしているはず。

$$\sum_x f(x) dx = 0$$

ここで 0-form

$$g(x) \equiv \sum_{y=-\infty}^{x-1} f(y)$$

を定義すると、

$$dg = \left( \sum_{y=-\infty}^x - \sum_{y=-\infty}^{x-1} \right) f(x) dx = f$$

となり、さらに、

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$$

となっているので、1次元の場合に Lemma が成り立つことがわかった。

さて、 $n - 1$  次元で Lemma が成り立っているとしよう。 $n$  次元  $k$ -form  $f$  を次のように分解する。

$$\begin{aligned} f &= u dx_n + v \\ u &\in \Omega_{k-1}, v \in \Omega_k \end{aligned}$$

ここで  $k = n$  のとき、 $v = 0$  であることに注意しよう。 $x_n$  依存性を無視すれば、 $u, v$  は  $n - 1$  次元格子上の微分形式であるとみなせる。 $n - 1$  次元の外微分を  $\bar{d}$  で表そう。すると、

$$df = \{\bar{d}u + (-1)^k \partial_n v\} dx_n + \bar{d}v$$

となっていることがわかる。さらに、 $df = 0$  のとき、

$$\bar{d}u + (-1)^k \partial_n v = 0, \bar{d}v = 0 \tag{3.6}$$

が成り立つ。 $|x| \rightarrow \infty$  で  $u, v \rightarrow 0$  となることを考慮すると、任意の  $u$  に対して、この方程式を満たす  $v$  が、積分定数も含めて一意的に存在することがわかる。ここで  $x_n$  に依存しない  $n - 1$  次元の  $k - 1$ -form  $\bar{u}$  を定義しよう。

$$\bar{u}(x) = \sum_{y_n=-\infty}^{\infty} u(y) \quad , \quad y = (x_1, \dots, x_{n-1}, y_n)$$

この  $\bar{u}$  について,

$$\begin{aligned}\bar{d}\bar{u} &= \sum_{y_n=-\infty}^{\infty} \bar{d}u(y) \\ &= \sum_{y_n=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} \partial_n v \\ &= 0\end{aligned}$$

であることがわかるので,  $\bar{u} = \bar{d}\bar{g}$  となる  $\bar{g} \in \Omega_{k-2}$  が存在する。次に,  $n$  次元  $k-1$ -form  $h$  を定義する。

$$h(x) = (-1)^{k-1} \sum_{y_n=-\infty}^{x_n-1} \{u(y) - \delta_{y_n, z_n} \bar{u}(x)\}$$

この  $h$  は,  $|x| \rightarrow \infty$  で  $h \rightarrow 0$  の条件を満たし,

$$\begin{aligned}(-1)^k \partial_n (\bar{d}h(x)) &= (-1)^k \partial_n \left\{ (-1)^{k-1} \sum_{y_n=-\infty}^{x_n-1} (\bar{d}u(y) - \delta_{y_n, z_n} \bar{d}\bar{u}(x)) \right\} \\ &= -(\bar{d}u - \delta_{x_n, z_n} \bar{d}\bar{u}) \\ &= -\bar{d}u\end{aligned}$$

となり, 方程式 (3.6) の解となっているので, 解の一意性から

$$v = \bar{d}h$$

であることがわかる。また,

$$\begin{aligned}dh(x) &= \bar{d}h + (-1)^{k-1} \partial_n h(x) dx^n \\ &= v + (u(x) - \delta_{x_n, z_n} \bar{u}(x)) dx_n\end{aligned}$$

と書き直すことができるので,

$$\begin{aligned}f(x) &= u dx_n + v \\ &= \delta_{x_n, z_n} \bar{u}(x) dx_n + dh(x) \\ &= \delta_{x_n, z_n} \bar{d}\bar{g}(x) dx_n + dh(x) \\ &= d(\delta_{x_n, z_n} \bar{g}(x) dx_n + h(x))\end{aligned}$$

となって, 補題を満たす

$$g(x) = \delta_{x_n, z_n} \bar{g}(x) dx_n + h(x)$$

が存在することがわかった。証明終。

また, 随伴外微分についても同様の Lemma が成り立つ。

**Lemma 2 (Poincaré の補題その 2)**  $n$ 次元無限体積格子上的  $k$ -form  $f$  が,

$$\begin{aligned} d^* f(x) &= 0, \quad f(x) \rightarrow 0 \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty \\ \sum_x f(x) &= 0 \quad \text{if } k = 0 \end{aligned}$$

の条件を満たすとき,

$$f(x) = d^* g(x), \quad g(x) \rightarrow 0 \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

となる  $g(x) \in \Omega_{k+1}$  が存在する。

このように, U(1) 理論では, 格子上でも Poincaré の補題に相当するものが存在し, cohomology が議論できることがわかる。

### 3.2 U(1) 理論の action と admissible gauge potential

格子上の U(1) gauge 理論では, plaquette  $P_{\mu\nu}$  と, field strength  $F_{\mu\nu}$  を 1 対 1 で対応づけることが可能である。cohomology を議論するとき,  $F_{\mu\nu}$  を利用するので,  $P_{\mu\nu}$  ではなく,  $F_{\mu\nu}$  を基本的な量として考えた方が便利である。以下,  $a = 1$  として議論する。

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) &\equiv -i \ln P_{\mu\nu}(x) \quad -\pi < F_{\mu\nu}(x) \leq \pi \\ P_{\mu\nu}(x) &= U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x) \\ U, P &\in \text{U}(1) \end{aligned} \quad (3.8)$$

この  $F_{\mu\nu}$  を用いて, gauge 場の action は次のように定義される。

$$\begin{aligned} S_G &= \frac{1}{4g_0^2} a^4 \sum_x \sum_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mu\nu}(x) \\ \mathcal{L}_{\mu\nu}(x) &= \begin{cases} \frac{[F_{\mu\nu}(x)]^2}{1 - [F_{\mu\nu}(x)]^2/\epsilon^2} & \text{if } |F_{\mu\nu}(x)| < \epsilon \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.9)$$

この action は, admissibility condition が課されていて, しかも gauge 場について微分可能なものになっていることがわかる。

一方, fermion action は Neuberger の Dirac 演算子を用いて,

$$\begin{aligned} S_F &= \sum_x \bar{\psi}(x) D(x, y) \psi(y) \\ D &= 1 - \frac{A}{\sqrt{A^\dagger A}} \\ A &= 1 - D_w, \\ D_w &= \frac{1}{2} \gamma_\mu (\nabla_\mu^* + \nabla_\mu) - \frac{1}{2} \nabla_\mu^* \nabla_\mu \end{aligned} \quad (3.10)$$

と、定義する。この Dirac 演算子の locality を保証するため、 $\epsilon < 1/30$  とする。

さらに、無限体積格子上的のこの action で定義される理論では、次の性質を満たす gauge potential  $A_\mu(x)$  が存在することがわかる。

$$\begin{aligned} U_\mu(x) &= e^{iA_\mu(x)}, \quad |A_\mu(x)| \leq \pi(1 + 8\|x\|) \\ F_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$\| \cdot \|$  は、taxi driver distance とよばれるもので、site  $x$  までの、link に沿った最短経路の道のりを表す。

**証明** まず、Bianchi identity  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0$  を示す。

次の量を定義する。

$$a_\mu(x) = -i \ln U_\mu(x) \quad , \quad -\pi < a_\mu(x) \leq \pi$$

このとき、 $F_{\mu\nu}(x)$  は、

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu a_\nu(x) - \partial_\nu a_\mu(x) + 2\pi n_{\mu\nu}(x) \quad (3.12)$$

と表せる。ただし、 $n_{\mu\nu}$  は整数値反対称テンソル。ここで次の 2-form を導入しよう。

$$F = F_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \quad n = n_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

外微分を作用させると、

$$dF = 2\pi dn$$

であることがわかる。 $dn$  も整数値であることに注意。ところで、*admissibility condition* より、

$$\begin{aligned} |\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma}| &< 6|F_{\mu\nu}| \\ &< 6\epsilon \end{aligned}$$

なので、 $\epsilon < \frac{\pi}{3}$  のとき、

$$dF = 2\pi dn = 0$$

となる。

さて、 $dn = 0$  となることがわかったので Poincaré の補題より、

$$n = dm$$

となる 1-form  $m = m_\mu(x) dx_\mu$  が存在する。よって、条件を満たす

$$A_\mu(x) = a_\mu(x) + 2\pi m_\mu(x) \quad (3.13)$$

の存在が証明できる。さらに、gauge 固定を行うと、

$$|A_\mu(x)| \leq \pi(1 + 8\|x\|)$$

を満たすように  $A_\mu(x)$  を選ぶことができる。

このようにして、連続理論との対応がわかりやすい  $A_\mu(x)$  と  $F_{\mu\nu}(x)$  を用いて議論できるのである。これが admissibility のもたらす大きな効果である。

### 3.3 U(1) 理論の topological field

さて、U(1) 理論の topological field について調べていこう。前々節の cohomology の議論が強力な道具になる。結果を先に示す。4次元無限体積格子上の任意の topological field  $q(x)$  は次の形になっていることがわかる。

$$q(x) = \alpha + \beta_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) + \gamma \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}(x) F_{\rho\sigma}(x + \hat{\mu} + \hat{\nu}) + \partial_\mu^* k_\mu(x) \quad (3.14)$$

以下、上の証明を追っていく。次を満たす gauge 不変な local topological field  $q(x)$  を考える。

$$\sum_x \frac{\partial q(x)}{\partial A_\mu(y)} = 0 \quad (3.15)$$

ここで  $q(x, t) \equiv q(tA_\mu(x))$  として、 $t$  で微分して積分するという作業をすると、

$$\begin{aligned} q(x) &= \alpha + \sum_y \int_0^1 dt \left( \frac{\partial q(x, t)}{\partial A_\nu(y)} \right)_{A \rightarrow tA} \times A_\nu(y) \\ &\equiv \alpha + \sum_y j_\nu(x, y) A_\nu(y) \end{aligned} \quad (3.16)$$

と書き直すことができる。 $\alpha$  は積分定数である。 $q(x)$  の locality より、 $y \rightarrow \infty$  で  $j_\nu(x, y) \rightarrow 0$  であることに注意。よって  $q(x)$  は有限量である。さらに、群が U(1) であることを考慮すると、任意の変分は gauge 変換と可換である。よって、 $q(x)$  が gauge 不変ならば  $j_\nu(x, y)$  も gauge 不変である。式 (3.16) を gauge 変換してみよう。

$$\begin{aligned} \delta_g q(x) &= \sum_y \delta_g j_\nu(x, y) A_\nu(y) + \sum_y j_\nu(x, y) \delta_g A_\nu(y) \\ &= - \sum_y j_\nu(x, y) \partial_\nu \omega(y) \\ &= \sum_y j_\nu(x, y) \overleftarrow{\partial}_\nu^* \omega(y) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

ただし、 $\overleftarrow{\partial}_\nu^*$  は  $y$  に関する後方差分を表す。上の式より、

$$j_\nu(x, y) \overleftarrow{\partial}_\nu^* = 0 \quad (3.18)$$

であることがわかり、この  $j_\nu(x, y)$  は  $y$  について、1-form とみなせるので、Poincaré の補題より、

$$j_\nu(x, y) = \theta_{\nu\rho}(x, y) \overleftarrow{\partial}_\rho^* \quad (3.19)$$

となる 2 階反対称テンソル  $\theta_{\nu\rho}$  が存在する。ただし、 $x$  については scalar としてふるまうので注意する。この式を式 (3.16) に代入すると、

$$\begin{aligned}
q(x) &= \alpha + \sum_y \theta_{\nu\rho}(x, y) \overleftarrow{\partial}_\rho^* A_\nu(y) \\
&= \alpha - \sum_y \theta_{\nu\rho}(x, y) \partial_\rho A_\nu(y) \\
&= \alpha + \frac{1}{2} \sum_y \theta_{\mu\nu}(x, y) F_{\mu\nu}(y) \\
&= \alpha + \frac{1}{2} \sum_y \left[ \theta_{\mu\nu}(x, y) + \delta_{xy} \sum_z \theta_{\mu\nu}(z, x) \right. \\
&\quad \left. - \delta_{xy} \sum_z \theta_{\mu\nu}(z, x) \right] F_{\mu\nu}(y) \\
&= \alpha + \phi_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2} \sum_y \eta_{\mu\nu}(x, y) F_{\mu\nu}(y) \quad (3.20)
\end{aligned}$$

と書き直すことができる。ただし、

$$\begin{aligned}
\phi_{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{2} \sum_z \theta_{\mu\nu}(z, x) \\
\eta_{\mu\nu}(x, y) &= \theta_{\mu\nu}(x, y) - \delta_{xy} \sum_z \theta_{\mu\nu}(z, x) \quad (3.21)
\end{aligned}$$

と定義した。これらは gauge 不変量である。

$\phi_{\mu\nu}(x)$  は、次の性質を持つ。

$$\begin{aligned}
\partial_\mu^* \phi_{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{2} \sum_z \theta_{\mu\nu}(z, x) \overleftarrow{\partial}_\mu^* \\
&= -\frac{1}{2} \sum_z j_\nu(z, x) \\
&= 0 \quad (3.22)
\end{aligned}$$

ここで式 (3.19), (3.15), (3.16) を利用した。また、 $\eta_{\mu\nu}$  は次の性質を持つ。

$$\sum_x \eta_{\mu\nu}(x, y) = 0 \quad (3.23)$$

$\eta$  は  $x$  について 0-form であるとみなせるので、Poincaré の補題より、次の gauge 不変な  $\tau_{\lambda\mu\nu}$  が存在する。

$$\eta_{\mu\nu}(x, y) = \partial_\lambda^* \tau_{\lambda\mu\nu}(x, y) \quad (3.24)$$

ここで次の gauge 不変テンソルを定義する。

$$h_\mu(x) = \frac{1}{2} \sum_y \tau_{\mu\nu\rho}(x, y) F_{\nu\rho}(y) \quad (3.25)$$

すると,  $q(x)$  は次の形にまとめることができる。

$$q(x) = \alpha + \phi_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu^* h_\mu(x) \quad (3.26)$$

さて,  $\phi_{\mu\nu}(x)$  について  $q$  と同様の過程をくり返すと, 次の式が得られる。

$$\phi_{\mu\nu}(x) = \beta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum_y \xi_{\mu\nu\rho\sigma}(x, y) F_{\rho\sigma}(y) \quad (3.27)$$

$\xi_{\mu\nu\rho\sigma}$  は次の性質を満たす gauge 不変テンソルである。

$$\xi_{\mu\nu\rho\sigma} = -\xi_{\nu\mu\rho\sigma} = -\xi_{\mu\nu\sigma\rho} \quad \partial_\mu^* \xi_{\mu\nu\rho\sigma}(x, y) \overleftarrow{\partial}_\rho^* = 0 \quad (3.28)$$

2つめの式は式(3.22)より導かれる。ここでさらに Poincaré の補題を使うと,

$$\begin{aligned} \partial_\mu^* \xi_{\mu\nu\rho\sigma}(x, y) &= v_{\nu\lambda}(x, y) \overleftarrow{\partial}_\tau^* \epsilon_{\lambda\tau\rho\sigma} \\ \partial_\nu^* v_{\nu\lambda}(x, y) &= \omega(x, y) \overleftarrow{\partial}_\lambda^* \end{aligned} \quad (3.29)$$

となる  $v_{\nu\lambda}, \omega(x, y)$  が存在する。

この  $\omega(x, y)$  を用いて次の量を定義しよう。

$$\gamma = -\frac{1}{2} \sum_z \omega(z, x) \quad (3.30)$$

差分をとってみると,

$$\begin{aligned} \partial_\mu^* \gamma &= -\frac{1}{2} \sum_z \omega(z, x) \overleftarrow{\partial}_\mu^* \\ &= -\frac{1}{2} \sum_z \partial_\nu^* v_{\nu\mu}(z, x) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

となり, この  $\gamma$  は定数であることがわかる。さらに,

$$\omega(x, y) + 2\gamma\delta_{xy}$$

は, 次の式を満たす  $x$  についての 0-form であるとみなせる。

$$\sum_x [\omega(x, y) + 2\gamma\delta_{xy}] = 0$$

よって Poincaré の補題より,

$$\omega(x, y) + 2\gamma\delta_{xy} = \partial_\nu^* \varphi_\nu(x, y) \quad (3.32)$$

となる  $\varphi_\nu$  が存在する。

この  $\varphi_\nu$  を用いてテンソル  $\hat{v}_{\nu\lambda}$  を定義しよう。

$$\hat{v}_{\nu\lambda}(x, y) = v_{\nu\lambda}(x, y) - \varphi_\nu(x, y) \overleftarrow{\partial}_\lambda^* \quad (3.33)$$

$\hat{v}_{\nu\lambda}$  は次の性質を持つ。

$$\begin{aligned} \hat{v}_{\nu\lambda}(x, y) \overleftarrow{\partial}_\tau^* \epsilon_{\lambda\tau\rho\sigma} &= v_{\nu\lambda}(x, y) \overleftarrow{\partial}_\tau^* \epsilon_{\lambda\tau\rho\sigma} \\ &= \partial_\mu^* \xi_{\mu\nu\rho\sigma}(x, y) \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu^* \hat{v}_{\mu\lambda}(x, y) &= \partial_\mu^* v_{\mu\lambda}(x, y) - \partial_\mu^* \varphi_\mu(x, y) \overleftarrow{\partial}_\lambda^* \\ &= \omega(x, y) \overleftarrow{\partial}_\lambda^* - \{\omega(x, y) + 2\gamma\delta_{xy}\} \overleftarrow{\partial}_\lambda^* \\ &= -2\gamma\delta_{xy} \overleftarrow{\partial}_\lambda^* \end{aligned} \quad (3.35)$$

$\hat{v}_{\nu\lambda}$  は  $v_{\nu\lambda}$  と同じ方程式を満たし、しかも厳密に解くことができるのがわかる。上の2つめの式を書き直すと、

$$\partial_\nu^* \hat{v}_{\mu\lambda}(x, y) = 2\gamma\partial_\nu^* \{\delta_{\nu\lambda}\delta_{x, y-\hat{\nu}}\} \quad (3.36)$$

となり、これを解くと、

$$\hat{v}_{\mu\lambda}(x, y) = 2\gamma\delta_{\nu\lambda}\delta_{x, y-\hat{\nu}} + \partial_\mu^* \vartheta_{\mu\nu\lambda}(x, y), \quad \vartheta_{\mu\nu\lambda} = -\vartheta_{\nu\mu\lambda} \quad (3.37)$$

となる。さらに、今度は  $\hat{\xi}_{\mu\nu\rho\sigma}$  を定義しよう。

$$\hat{\xi}_{\mu\nu\rho\sigma}(x, y) = \xi_{\mu\nu\rho\sigma}(x, y) - \vartheta_{\mu\nu\lambda}(x, y) \overleftarrow{\partial}_\tau^* \epsilon_{\lambda\tau\rho\sigma} \quad (3.38)$$

この  $\hat{\xi}_{\mu\nu\rho\sigma}$  は次の性質を持つ。

$$\begin{aligned} \phi_{\mu\nu}(x) &= \beta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum_y \left[ \hat{\xi}_{\mu\nu\rho\sigma}(x, y) + \vartheta_{\mu\nu\lambda}(x, y) \overleftarrow{\partial}_\tau^* \epsilon_{\lambda\tau\rho\sigma} \right] F_{\rho\sigma}(y) \\ &= \beta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum_y \hat{\xi}_{\mu\nu\rho\sigma}(x, y) F_{\rho\sigma}(y) \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu^* \hat{\xi}_{\mu\nu\rho\sigma}(x, y) &= \partial_\mu^* \xi_{\mu\nu\rho\sigma}(x, y) - \partial_\mu^* \vartheta_{\mu\nu\lambda}(x, y) \overleftarrow{\partial}_\tau^* \epsilon_{\lambda\tau\rho\sigma} \\ &= \hat{v}_{\nu\lambda}(x, y) \overleftarrow{\partial}_\tau^* \epsilon_{\lambda\tau\rho\sigma} - (\hat{v}_{\mu\lambda}(x, y) - 2\gamma\delta_{\nu\lambda}\delta_{x, y-\hat{\nu}}) \overleftarrow{\partial}_\tau^* \epsilon_{\lambda\tau\rho\sigma} \\ &= 2\gamma\delta_{x, y-\hat{\nu}} \overleftarrow{\partial}_\tau^* \epsilon_{\nu\tau\rho\sigma} \end{aligned} \quad (3.40)$$

ここで式(3.27), Bianchi identity などを利用した。 $\hat{v}_{\nu\lambda}$  のときと同様に、 $\hat{\xi}_{\mu\nu\rho\sigma}$  も  $\xi_{\mu\nu\rho\sigma}$  と同じ性質を持ち、かつ厳密に解くことができるのがわかる。2つめの方程式を解くと、次のようになる。

$$\hat{\xi}_{\mu\nu\rho\sigma}(x, y) = 2\gamma\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\delta_{x, y-\hat{\mu}-\hat{\nu}} + \epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} \partial_\lambda^* \kappa_{\tau\rho\sigma}(x, y) \quad (3.41)$$

ただし、 $\kappa_{\tau\rho\sigma}$  は反対称テンソル。ここで次のテンソルを定義する。

$$t_{\lambda\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} \sum_y \epsilon_{\lambda\mu\nu\tau} \kappa_{\tau\rho\sigma}(x, y) F_{\rho\sigma}(y) \quad (3.42)$$

すると、結局  $\phi_{\mu\nu}$  は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\phi_{\mu\nu}(x) &= \beta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum_y [2\gamma\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\delta_{x,y-\hat{\mu}-\hat{\nu}} + \epsilon_{\mu\nu\lambda\tau}\partial_\lambda^* \kappa_{\tau\rho\sigma}(x,y)] F_{\rho\sigma}(y) \\ &= \beta_{\mu\nu} + \gamma\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}(x + \hat{\mu} + \hat{\nu}) + \partial_\lambda^* t_{\lambda\mu\nu}(x)\end{aligned}\quad (3.43)$$

これを式 (3.26) に代入すると、

$$\begin{aligned}q(x) &= \alpha + \beta_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) + \gamma\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}(x) F_{\rho\sigma}(x + \hat{\mu} + \hat{\nu}) + \partial_\mu^* h_\mu(x) \\ &\quad + \partial_\lambda^* t_{\lambda\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x)\end{aligned}\quad (3.44)$$

となる。そして、Bianchi identity より、

$$\partial_\lambda^* t_{\lambda\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) = \partial_\lambda^* \{t_{\lambda\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x + \hat{\mu})\}\quad (3.45)$$

となることがわかるので、

$$\begin{aligned}q(x) &= \alpha + \beta_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) + \gamma\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}(x) F_{\rho\sigma}(x + \hat{\mu} + \hat{\nu}) + \partial_\mu^* k_\mu(x) \\ k_\mu(x) &= h_\mu(x) + t_{\mu\nu\lambda}(x) F_{\nu\lambda}(x + \hat{\mu})\end{aligned}\quad (3.46)$$

となって、式 (3.14) が証明される。さらに、 $q(x)$  が pseudo scalar であることを要請すると、条件はより厳しくなり、

$$q(x) = \gamma\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}(x) F_{\rho\sigma}(x + \hat{\mu} + \hat{\nu}) + \partial_\mu^* k_\mu(x)\quad (3.47)$$

となる。よって U(1) 理論の anomaly は連続理論の anomaly に対応するものに、gauge 不変な current の全微分を加えたもので書けることがわかる。

### 3.4 U(1) 理論の measure term

前節の結果より、4次元無限体積格子上の U(1) 理論では、cohomology の議論が可能である。この節では、anomaly が topological field であることを確かめ、measure term を具体的に構成する。さらに、この measure term が必要な性質を満たしていることも確かめる。

まず、anomaly が topological field であることを確認しよう。式 (2.34) で与えられる anomaly を、扱いやすい形に書き変える。

$$\begin{aligned}A(x) &= -\frac{1}{2} \text{tr} \{T\gamma_5 D(x,x)\} \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \{T\hat{\gamma}_5\}\end{aligned}\quad (3.48)$$

$\hat{\gamma}_5^2 = 1$  より、 $\hat{\gamma}_5$  の任意の変分は次の関係式を満たす。

$$\delta\hat{\gamma}_5\hat{\gamma}_5 + \hat{\gamma}_5\delta\hat{\gamma}_5 = 0$$

これを用いると,

$$\begin{aligned}
\sum_x \delta A(x) &= \frac{1}{2} Tr \{ T \delta \hat{\gamma}_5 \} \\
&= -\frac{1}{2} Tr \{ T \hat{\gamma}_5 \delta \hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}_5 \} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.49}$$

となるので, anomaly が topological field だとわかる。よって, 前節の結果より, anomaly  $A(x)$  は次のように書ける。

$$A(x) = \gamma \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}(x) F_{\rho\sigma}(x + \hat{\mu} + \hat{\nu}) + \partial_\mu^* k_\mu(x) \tag{3.50}$$

さらに連続極限をとった式 (2.37) と比較すると,

$$\gamma \propto d_R = \sum_{\alpha=1}^N e_\alpha^3$$

であることがわかる。ただし,  $e_\alpha$  は電荷を表す。よって, anomaly free ( $d_R = 0$ ) のとき, anomaly は

$$A(x) = \partial_\mu^* k_\mu(x) \tag{3.51}$$

と表せる。

さて, この結果を利用して measure term を構成しよう。

Suzuki[26] に従って議論を進める。measure term は, gauge 不変な effective action を構成する過程で現れる。

まず, 連続理論における fermion の effective action  $W$  を考えよう。

$$W = \ln \int D[\psi] D[\bar{\psi}] e^{-S_F} \tag{3.52}$$

effective action の変分  $\delta W$  は藤川の方法に従って共変正則化すると, 次のようになることがわかる。

$$\begin{aligned}
\langle \delta W \rangle_{cov} &= -i \int d^4x \delta A_\mu^a(x) \langle J_\mu^a \rangle_{cov} \\
&= -i \int d^4x \delta A_\mu^a(x) \langle \bar{\psi}_L \gamma_\mu T^a \psi_L(x) \rangle_{cov} \\
&= i \int d^4x \delta A_\mu^a(x) \lim_{y \rightarrow x} tr \left[ T^a \gamma_\mu P_L f \left( \frac{D^2}{M} \right) \frac{1}{D} \delta(x-y) \right]
\end{aligned} \tag{3.53}$$

ただし, 時空は Euclid とし, 群の生成子  $T^a$  はエルミートにとった。このとき, covariant anomaly は次のように表される。

$$D_\mu \langle J_\mu^a \rangle_{cov} = -\frac{i}{32\pi^2} tr T^a \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \tag{3.54}$$

格子理論でこの  $\delta W$  に対応するものは次の量である。

$$\delta W_{lat} = Tr[\delta D \hat{P} D^{-1}] \quad (3.55)$$

格子理論は gauge 不変性を保つ正則化であるので、これは連続理論では共変正則化された量に対応するはずである。さて、これより、「正則化された」effective action は

$$W' = \int_0^1 dt Tr \partial_t D_t P_t D_t^{-1} \quad (3.56)$$

で与えられる。ただし、 $D_t, P_t$  は link 変数が  $U_\mu^t = e^{itA_\mu}$  となるようにとったときの値。ここで次の gauge 変換を考えよう。

$$D_t \rightarrow e^{it\lambda T} D_t e^{-it\lambda T} \quad (3.57)$$

ただし、 $T$  は generator(電荷)。effective action は次のように変換される。

$$\begin{aligned} \delta_\lambda W' &= i \int_0^1 dt Tr \{ [\lambda T, D_t] P_t D_t^{-1} \} \\ &= i \int_0^1 dt Tr \{ \lambda T D_t P_t D_t^{-1} - \lambda T P_t \} \\ &= -i \int_0^1 dt Tr \left\{ \lambda T \frac{1}{2} \gamma_5 D_t \right\} \\ &= i \int_0^1 dt \sum_x \lambda(x) A_t(x) \end{aligned} \quad (3.58)$$

$A_t(x)$  は link 変数が  $U_\mu^t = e^{itA_\mu}$  のときの anomaly を表す。式 (2.34) 参照。anomaly free ( $d_R = 0$ ) のとき、

$$A_t(x) = \partial_\mu^* k_\mu^t(x)$$

であるから、結局

$$\delta_\lambda W' = i \int_0^1 dt \sum_x \lambda(x) \partial_\mu^* k_\mu^t(x) \quad (3.59)$$

となる。連続理論では右辺は 0 になることに注意しよう。実際右辺は  $O(a)$  の量である。ところが、anomaly free のとき、この  $k_\mu$  を用いて effective action を gauge 不変になるように「再定義」することが可能である。(anomaly free でないときは不可能である。) 次のような  $W$  を再定義された effective action として導入しよう。

$$\begin{aligned} W &\equiv W' + K \\ K &\equiv -i \int_0^1 dt \sum_x A_\mu(x) k_\mu^t(x) \end{aligned} \quad (3.60)$$

$K$  を gauge 変換してみると,

$$\delta_\lambda K = -i \int_0^1 dt \sum_x \lambda(x) \partial_\mu^* k_\mu^t(x) \quad (3.61)$$

となって  $\delta_\lambda W'$  と相殺する。こうして gauge 不変な effective action が得られた。以上の過程は、連続理論において、covariant anomaly から consistent anomaly を求めるやり方とよく似ている。

さらに、このとき  $W$  は、式 (2.23) の  $\ln \det M$  と等価なものである。このことを確かめよう。まず、 $W'$  の変分を考える。

$$\begin{aligned} \delta_\eta W' &= \int_0^1 dt \text{Tr} \left\{ \partial_t (\delta_\eta D_t) P_t D_t^{-1} + \frac{1}{2} \partial_t (D_t) \gamma_5 \delta_\eta D_t D_t^{-1} \right. \\ &\quad \left. - \partial_t (D_t) P_t D_t^{-1} \delta_\eta D_t D_t^{-1} \right\} \\ &= \int_0^1 dt \text{Tr} \left\{ \partial_t (\delta_\eta D_t P_t D_t^{-1}) - \text{Tr} \delta_\eta D_t \partial_t P_t D_t^{-1} \right\} \\ &= \text{Tr} \delta_\eta D \hat{P}_- D^{-1} + \int_0^1 dt \text{Tr} \delta_\eta D_t \partial_t P_t D_t^{-1} \\ &= \text{Tr} \delta_\eta D \hat{P}_- D^{-1} + \int_0^1 dt \text{Tr} P_t [\partial_t P_t, \delta_\eta P_t] \end{aligned} \quad (3.62)$$

これより、 $W$  の変分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta_\eta W &= \delta_\eta W' + \delta_\eta K \\ &= \text{Tr} \delta_\eta D \hat{P}_- D^{-1} + \int_0^1 dt \text{Tr} P_t [\partial_t P_t, \delta_\eta P_t] \\ &\quad - i \int_0^1 dt \sum_x [\eta_\mu k_\mu^t + A_\mu \delta_\eta k_\mu^t] \end{aligned} \quad (3.63)$$

さて、 $W$  と、 $\ln \det M$  とが同じものならば、式 (2.25) と上の式との比較より、第 2 項以下が measure term になっているはずである。

$$\begin{aligned} -i \mathcal{L}_\eta &= \sum_x \eta_\mu(x) j_\mu(x) \\ &= \int_0^1 dt \text{Tr} P_t [\partial_t P_t, \delta_\eta P_t] - i \int_0^1 dt \sum_x [\eta_\mu k_\mu^t + A_\mu \delta_\eta k_\mu^t] \end{aligned} \quad (3.64)$$

こうして与えられた measure term が必要な条件を全て満たすことを確かめよう。

まず gauge 不変性を確かめる。 $k_\mu$  の gauge 不変性を考慮すると、measure term の gauge 変換は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta_\omega \mathcal{L}_\eta &= -\int_0^1 dt \text{Tr} P_t [\omega T, P_t], \delta_\eta P_t - \int_0^1 dt \sum_x \partial_\mu \omega \delta_\eta k_\mu^t(x) \\
&= \int_0^1 dt \text{Tr} \omega T \delta_\eta P_t + \int_0^1 dt \sum_x \omega \partial_\mu^* \delta_\eta k_\mu^t(x) \\
&= \int_0^1 dt \sum_x \omega(x) \frac{1}{2} \delta_\eta \text{tr} \{ \gamma_5 T D(x, x) \} \\
&\quad + \int_0^1 dt \sum_x \omega \delta_\eta \partial_\mu^* k_\mu^t(x) \\
&= -\int_0^1 dt a^4 \sum_x \omega(x) \delta_\eta [A_t(x) - \partial_\mu^* k_\mu^t(x)] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.65}$$

このように measure term が gauge 不変であることが確かめられた。ただし、次の式を利用した。

$$P_t \delta P_t P_t = 0, \quad \text{Tr} [\delta_1 P_t \delta_2 P_t \delta_3 P_t] = 0 \tag{3.66}$$

ここで  $\delta_i$  は任意の変分を表す。

次に, parity 変換をしてみよう。定義より,  $k_\mu$  の parity は odd である。次の式を利用すると, measure term の parity は odd であることがわかる。

$$\text{Tr} \hat{P}_+ [\partial_t \hat{P}_+, \delta \hat{P}_+] = -\text{Tr} \hat{P}_- [\partial_t \hat{P}_-, \delta \hat{P}_-] \tag{3.67}$$

また,  $\eta_\mu = -\partial_\mu \omega$  にとると, anomalous Ward identity は簡単に得られる。

$$\partial_\mu^* j_\mu = \partial_\mu^* k_\mu^1 = A(x) \tag{3.68}$$

最後に, 積分可能性条件を満たしていることを確かめよう。式 (3.66) を利用すると, 次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta_\eta \mathcal{L}_\zeta - \delta_\zeta \mathcal{L}_\eta &= i \int_0^1 dt \text{Tr} \{ P_t [\delta_\eta \partial_t P_t, \delta_\zeta P_t] - P_t [\delta_\zeta \partial_t P_t, \delta_\eta P_t] \} \\
&= i \int_0^1 dt \partial_t \text{Tr} \{ P_t [\delta_\eta P_t, \delta_\zeta P_t] \} \\
&= i \text{Tr} \{ \hat{P}_- [\delta_\eta \hat{P}_-, \delta_\zeta \hat{P}_-] \}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

U(1) 理論では  $[\eta, \zeta] = 0$  なので, この式が積分可能条件である。

こうして与えられた measure term  $\mathcal{L}_\eta$  は, 必要な条件を全て満たしているので,  $W$  は,  $\ln \det M$  とが同等であることが確かめられ, U(1) 理論が無限体積格子上で定式化できることがわかった。

同様の議論が,  $SU(2) \times U(1)$  の場合にも適用できることが確かめられている。[29]

### 3.5 admissibility condition の役割について

U(1) 理論の構成における admissibility condition の役割をまとめよう。

1. admissibility の下では Bianchi identity が成り立つ。これにより、連続理論のベクトルポテンシャルに対応した  $A_\mu(x)$  を用いて gauge 場を表現することが可能になった。
2. admissibility は Dirac 演算子の局所性を保証しているため、anomaly に対して Poincaré の補題が適用できる。
3. Dirac 演算子の局所性と、Bianchi identity は topological field の分類にも大変有効であった。anomaly は完全に分類され、それを用いて measure term および measure current が構成できた。

このような効果は、Non Abelian gauge 理論においても期待できるだろう。以下では、さらに有限体積格子上的 U(1) 理論へ話を進める。ここでも admissibility が重要な役割を果たす。

## 4 有限体積格子上的 Chiral U(1) 理論

格子理論でシミュレーションを行うとき、格子の体積は有限にしかとれない。Lüscher は有限体積の格子でも (十分格子のサイズが大きければ)  $j_\mu$  が存在し、chiral U(1) 理論が構成できることを示した。

まず、field space の topology を明らかにし、その多様体上の接続を与えることが、measure term を与えることと等価であることが示された。このことからファイバー束の議論が可能になる。measure の一意性はこの多様体上のファイバー束が自明であるかどうかによって依存することになる。証明は非常に technical なものなので、以下では計算の詳細はできるだけ省き、要点をまとめていきたい。

### 4.1 有限体積の U(1) field の topology

この節でも  $a = 1$  とする。まず、有限体積格子上的 gauge 場の topology を明らかにしたい。通常の格子理論なら、link 変数はそれぞれ独立に U(1) 上の値をとれるので、gauge 場の空間  $\mathcal{U}$  は、

$$\mathcal{U} \cong U(1)^{N_{link}} \quad (4.1)$$

であることはすぐわかる。(ただし、 $N_{link}$  は link 変数の総数である。) しかし、admissibility condition の下では、 $\mathcal{U}$  は、より複雑なものになっている。

まず、 $\mathcal{U}$  が、topological sector に分かれていることを見よう。各 sector は、次の magnetic flux number  $m_{\mu\nu}$  で特徴づけられる。

$$\phi_{\mu\nu}(x) \equiv \sum_{s,t=0}^{L-1} F_{\mu\nu}(x + s\hat{\mu} + t\hat{\nu}) = 2\pi m_{\mu\nu},$$

$$m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu} \quad (4.2)$$

$m_{\mu\nu}$  は整数値テンソルである。式 (3.12) より、上の式はすぐに証明できる。さらに、Bianchi identity より、 $m_{\mu\nu}$  は座標に依らないことも示すことができる。つまり、topological number テンソル  $m_{\mu\nu}$  は全部で 6 個の独立な成分を持つ。(2次元なら 1 個。) admissibility condition により、この  $m_{\mu\nu}$  は、連続的な gauge 場の変換で変えることはできない。よって  $\mathcal{U}$  は  $m_{\mu\nu}$  毎の sector  $\mathcal{U}[m]$  に分かれているのである。

さて、各 sector  $\mathcal{U}[m]$  の topology はどうなっているだろうか? まず、次の Lemma に注目しよう。

**Lemma 3** *field strength  $F_{\mu\nu}$  と Wilson line  $W_\mu(x) = \prod_{s=0}^{L-1} U_\mu(x + s\hat{\mu})$  が等しい  $\{U_\mu(x)\}$  と  $\{\tilde{U}_\mu(x)\}$  は、gauge equivalent である。*

証明は省略する。

ここで、全ての  $m_{\mu\nu} = 0$  の sector  $\mathcal{U}[0]$  の topology を考えよう。その前にその  $\mathcal{U}[0]$  の中で、全ての field strength  $F_{\mu\nu} = 0$  の部分空間  $\mathcal{U}_0[0]$  を考える。この部分空間の配位  $\{U_\mu(x)\}$  は、次の配位に gauge equivalent であることが証明できる。

$$U_\mu^{[\omega]}(x) = \begin{cases} \omega_\mu & \text{if } x_\mu = 0 \pmod{L} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.3)$$

ただし、 $\omega_\mu \in \text{U}(1)$ 。この sector の任意の  $F_{\mu\nu} \neq 0$  の配位は、 $\{U_\mu^{[\omega]}(x)\}$  からの fluctuation と gauge 変換によって与えられる。(ただし、fluctuation は、admissibility condition を満たし、かつ wilson line も不変に保つようにとる。また、gauge 変換による重複を防ぐため、完全に gauge 固定した場のみを考える。)

さらに、他の sector の場も同様の考察ができる。任意の場はその sector に属するある代表元 (ここでは constant な電場を与える配位にする。) を与えて、そこからの fluctuation と gauge 変換によって表現できる。

以上のことをまとめよう。

$\mathcal{U}[m]$  の gauge 場は次のように与えられる。

$$U_\mu(x) = \Lambda(x) V_\mu^{[m]}(x) U_\mu^{[\omega]}(x) e^{iA_\mu^T(x)} \Lambda(x + \hat{\mu})^{-1} \quad (4.4)$$

$$V_\mu^{[m]}(x) = \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{L^2} \left[ L\delta_{x_\mu, L-1} \sum_{\nu>\mu} m_{\mu\nu} x_\nu + \sum_{\nu<\mu} m_{\mu\nu} x_\nu \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}\partial_\mu^* A_\mu^T(x) &= 0, \quad \sum_x A_\mu^T(x) = 0 \\ |\partial_\mu A_\nu^T(x) - \partial_\nu A_\mu^T(x) + 2\pi m_{\mu\nu}/L^2| &< \epsilon\end{aligned}\quad (4.5)$$

$\Lambda(x)$  は gauge 自由度,  $V_\mu^{[m]}(x)$  は constant な field strength  $2\pi m_{\mu\nu}/L^2$  を与える配位である。

ここで上の条件を満たす  $A_\mu^T$  の空間を  $\mathcal{A}[m]$  と表そう。この field space  $\mathcal{A}[m]$  中の任意の loop

$$\begin{aligned}A_\mu^T(x, s), \quad (0 \leq s \leq 1) \\ A_\mu^T(x, 1) = A_\mu^T(x, 0)\end{aligned}$$

が,  $A_\mu^T = 0$  に連続的に変形できることはすぐわかる:

$$A_\mu^T(x, s) \in \mathcal{A}[m] \implies tA_\mu^T(x, s) \in \mathcal{A}[m] \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (4.6)$$

よって  $\mathcal{A}[m]$  は可縮な空間であることがわかる。

従って, 任意の sector における field space  $\mathcal{U}[m]$  は, 次の topology を持っていることが確かめられた。

$$\begin{aligned}\mathcal{U}[m] &\cong (\text{Wilson line の空間}) \times (\text{gauge 自由度の空間}) \times \mathcal{A}[m] \\ &\cong \text{U}(1)^4 \times \text{U}(1)^{N_{\text{sites}}} \times \mathcal{A}[m]\end{aligned}\quad (4.7)$$

ただし,  $N_{\text{sites}}$  は site の総数。

## 4.2 fermion measure と field space 上の U(1) 束

この節では, measure term の一意性の問題に対して, ファイバー束の議論が利用できることを示す。chiral basis  $\{v_j(x)\}$  は field space 上に主束 (ここでは U(1) 束) を与える。measure term はこの U(1) 束の接続になっていることがわかる。この接続が大域的に定義できるかどうかは, U(1) 束の自明性によるのである。すなわち, measure の一意性は field space 上の U(1) 束の自明性の問題に置き換えることができる。

### 4.2.1 主束とその接続について

主束について簡単に復習する [27][28]。

**定義 (ファイバー束)** ファイバー束  $(E, \pi, M, F, G)$  とは次のものからなる。

1. 全空間とよばれる微分可能多様体  $E$ 。
2. 底空間とよばれる微分可能多様体  $M$ 。

3. ファイバーとよばれる微分可能多様体  $F$ 。
4. 射影とよばれる全射  $\pi: E \rightarrow M$ 。逆像  $\pi^{-1}(p) \equiv F_p \cong F$  は点  $p$  におけるファイバーとよばれる。
5. 構造群とよばれる *Lie* 群  $G$ 。  $G$  は左から  $F$  に作用する。
6.  $M$  の開被覆  $\{U_i\}$ ，および  $\pi\phi_i(p, f) = p$  を満たす微分同相写像  $\phi_i: U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ 。写像  $\phi_i$  は，  $\phi_i^{-1}$  が  $\pi^{-1}(U_i)$  を直積  $U_i \times F$  上につすので，局所自明化とよばれる。
7.  $\phi_i(p, f) = \phi_{i,p}(f)$  とかくとき，写像  $\phi_{i,p}: F \rightarrow F_p$  は微分同相写像である。  $U_i \cap U_j$  上では，

$$t_{ij}(p) \equiv \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p}: F \rightarrow F$$

が  $G$  の元であることを要請する。  $t_{ij}$  は変換関数とよばれる。  $\phi_i$  と  $\phi_j$  は滑らかな写像  $t_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow G$  によって

$$\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p)f)$$

によって関係づけられる。

直観的に言うとファイバー束とは，  $M$  の開被覆  $\{U_i\}$  とファイバー  $F$  の直積  $U_i \times F$  をひねりながら， はりあわせたものである。このひねり方を決めているのが変換関数  $\{t_{ij}\}$  である。全ての変換関数が恒等写像にとれるとき，そのファイバー束は自明束であるとよばれる。自明束は直積  $M \times F$  である。

**定義 (主束)** 主束とはファイバー  $F$  が構造群  $G$  と同一であるものをいう。

さて，逆にファイバー束を構成するために必要最低限の情報は何であろうか？ファイバー束の再構成について次のことが知られている。

**定理 (ファイバー束の再構成)** 底空間となる多様体  $M$  とその開被覆  $\{U_i\}$ ，変換関数  $t_{ij}(p)$ ，ファイバーとなる多様体  $F$ ，構造群  $G$  があたえられるとファイバー束を構成することができる。

証明は [28] 参照。主束は  $F = G$  だから，  $M, \{U_i\}, t_{ij}(p), G$  だけ与えられれば構成できることに注意しよう。

次に，主束上の接続について議論する。接続とは直観的にはファイバー束上の各点  $u$  でファイバーに「平行」な方向と「垂直」な方向を定義するものである。ファイバー束上における平行移動を定義するものと言ってもよい。

**定義 (垂直部分空間と水平部分空間)** 主束  $P$  上の点  $u$  と，底空間上の点  $p = \pi(u)$  におけるファイバー  $G_p$  を考える。  $u$  における  $P$  の接空間を  $T_u P$  とするとき，その中でとくに  $G_p$  に接する部分空間を垂直部分空間  $V_u P$  とよび，その補空間を水平部分空間  $H_u P$  とよぶ。

**定義 (接続)** 主束  $P$  上の接続とは、接空間  $T_u P$  を  $V_u P$  と  $H_u P$  へ一意的に分解する操作で、以下の条件を満たすものである。

1.  $T_u P = H_u P \oplus V_u P$
2.  $P$  上の滑らかなベクトル場  $X$  は次のように分解される。

$$X = X^H + X^V \quad X^H \in H_u P, X^V \in V_u P$$

3. 任意の  $u \in P, g \in G$  に対して  $H_{ug} P = R_{g*} H_u P$  となる。ただし、 $R_{g*}$  は右移動  $R_g h = hg$  の誘導写像。

ここで、 $V_u P$  は、定義より構造群  $G$  の Lie 環  $\mathcal{G}$  と同相であることがわかる。 $V_u P \cong \mathcal{G}$ 。この事実より、次の  $\mathcal{G}$  値 1-形式を利用して接続を与えることができる。

**定義 (接続 1-形式)** 接続 1-形式  $\omega \in \mathcal{G} \otimes T^* P$  は次の性質を持つものとする。 $X$  を  $u \in P$  における接ベクトル場とするととき、

$$R_g^* \omega_u(X) = g^{-1} \omega_u(X) g$$

ただし、 $R_g^*$  は右移動の引きもどし写像。このとき、

$$\begin{aligned} H_u P &\equiv \{X \in T_u P \mid \omega(X) = 0\} \\ V_u P &= (T_u P \text{ に対する } H_u P \text{ の補空間}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

とすると、これは接続の定義と一致する。

証明は省略。こうして接続が、接続 1-形式によって与えられることがわかった。

さらに、開被覆  $\{U_i\}$  の各  $U_i$  上で  $\mathcal{G}$  値 1-形式を定義し (局所接続形式)、そこから接続 1-形式  $\omega$  が再構成できることも知られている。

**定理 ( $U_i$  上 1-形式からの接続形式の構成)**  $U_i$  上に  $\mathcal{G}$  値 1-形式  $A_i$  と局所切断  $\sigma_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$  が与えられると、 $U_i$  上で  $A_i = \sigma_i^* \omega$  となる接続 1-形式が存在する。ただし、 $\omega$  の一意性より、 $U_i \cap U_j$  において次の条件を満たす必要がある。(両立条件)

$$A_j = t_{ij}^{-1} A_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} \quad (4.9)$$

ただし、 $d$  は  $M$  上の外微分。

証明は省略。ここで束が自明であるとき、 $A_j$  は大域的に定義できることに注意する。最後に (局所) 曲率を定義しよう。

**定義 (曲率形式)**  $U_i$  上の曲率形式は次のように定義される。

$$F_i = dA_i + A_i \wedge A_i \quad (4.10)$$

$U_i \cap U_j$  上では曲率形式は次の関係式を満たす。

$$F_j = t_{ij}^{-1} F_i t_{ij} \quad (4.11)$$

曲率は、主束の幾何学的構造を解析するのに、非常に有用な量である。

#### 4.2.2 接続としての measure term, 曲率

さて、以上の議論を fermion measure の問題に応用していこう。

field space  $U[m]$  上で, chiral basis  $\{v_i\}$  を一意的に選ぶことができるかどうかは自明ではない。そこで, この field space を patch  $\{X_a\}$  で被覆するとして,  $X_a$  毎に  $v_i^a$  を与えることを考える。  $X_a \cap X_b$  上では, basis は unitary 変換  $\tau$  でつながっている。

$$v_j^b(x) = \sum_k v_k^a(x) \tau(a \rightarrow b)_{kj} \quad (4.12)$$

ただし,  $\tau$  は次の cocycle condition を満たす。

$$\tau(a \rightarrow c) = \tau(a \rightarrow b) \tau(b \rightarrow c) \quad \text{on } X_a \cap X_b \cap X_c \quad (4.13)$$

ここで, 次の量を変換関数として与えよう。

$$g_{ab} \equiv \det \tau(a \rightarrow b) \quad (4.14)$$

$g_{ab} \in U(1)$  であるので,  $U[m], \{X_a\}, g_{ab}$  は  $U(1)$  束を構成することがわかる。

$X_a$  上における measure term  $\mathcal{L}_\eta^a$  を考えよう。

$$\mathcal{L}_\eta^a = i \sum_j (v_j^a, \delta_\eta v_j^a) \quad (4.15)$$

この  $\mathcal{L}_\eta^a$  が, 次の条件を満たすことは簡単に証明できる。

$$\mathcal{L}_\eta^b = \mathcal{L}_\eta^a - i g_{ab}^{-1} \delta_\eta g_{ab} \quad (4.16)$$

この式は両立条件 (4.9) になっていることがわかる。すなわち,  $\mathcal{L}_\eta^a$  は, この  $U(1)$  束の局所接続としての条件を満たすのである。さらに, 曲率は次のように与えられる。

$$\delta_\eta \mathcal{L}_\zeta - \delta_\zeta \mathcal{L}_\eta$$

束が自明であるとき, 局所接続が大域的に定義できることは既に述べた。従って, fermion measure が一意的であることを示すために証明すべきことは, この  $U(1)$  束の自明性である。以下では曲率を用いて,  $U(1)$  束の幾何学的構造を明らかにし, 格子の体積が十分大きければ, この  $U(1)$  束が自明になることを示す。

### 4.3 n次元 torus 上の接続

「可縮な底空間上のファイバー束は自明である。」という定理が知られている。

従って、 $U[m] \cong U(1)^n \times (\text{可縮な空間})$  上の  $U(1)$  束の自明性を知るためには、多次元 torus 上の  $U(1)$  束について解析すればよい。

$$T^n \cong U(1)^n \quad (4.17)$$

多次元 torus 上の  $U(1)$  束は完全に分類されているので、幾何学の結果から、束の自明性のための条件はすぐに得られる。

$T^n$  上の各点を  $(t_1 \cdots t_n)$  で座標づけしよう。ただし、 $0 \leq t_i \leq 2\pi$ 。曲率を  $C_{ij}$  で表すことにしよう。この曲率は、群の可換性より、patch のとりかたに依存しない。

**定理 ( $T^n$  上  $U(1)$  束の分類定理)**  $T^n$  上の  $U(1)$  束は次の量子化されたテンソル  $I_{ij}$  で分類される。(同じ  $I_{ij}$  の束は互いに同相で、 $I_{ij}$  の違う束は同相にはなりえない。)

$$I_{ij} = \int_0^{2\pi} dt_i dt_j C_{ij} = 2\pi M_{ij} \quad (4.18)$$

$M_{ij}$  は整数。さらに、全ての  $i, j$  に対して  $I_{ij} = 0$  ならば、束は自明である。

証明は省略。

こうして、 $I_{ij} = 0$  のための条件が、一意的な measure term の存在条件と等価であることがわかった。

### 4.4 有限体積格子上の current $j_\mu$ の存在

以上の結果を用いて、measure を一意的に与える current  $j_\mu$  の存在を証明していこう。

まず、考える有限体積格子 ( $\Gamma$  と表す。) を、周期的な無限体積格子の 1 単位とみなす。各有限体積格子を  $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$  で label して  $\Gamma_n$  と表そう。この無限体積格子に対して、必要な条件を満たす周期的な current  $j_\mu^\infty$  の存在は明らかである。この current  $j_\mu^\infty$  を用いて次の量を定義しよう。

$$\mathcal{K}_\eta = \sum_{x \in \Gamma} \eta_\mu(x) j_\mu^\infty(x) \quad (4.19)$$

ここで  $\eta_\mu(x)$  も周期的なものにとる。 $\eta_\mu(x)$  が無限遠まで定義されてしまっているので  $\mathcal{K}_\eta$  は無限体積格子の measure term  $\mathcal{L}_\eta^\infty$  とは違うものである。しかし、無限体積格子を作っている  $\Gamma_n$  の中のみで値を持つ次の  $\eta^n$  を用いて  $\mathcal{K}_\eta$

と  $\mathcal{L}_\eta^\infty$  の関係がわかる。

$$\eta_\mu^n(x) \equiv \begin{cases} \eta_\mu(x) & \text{if } x - Ln \in \Gamma \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\delta_\eta \mathcal{K}_\zeta - \delta_\zeta \mathcal{K}_\eta = \sum_n (\delta_{\eta^n} \mathcal{L}_{\zeta_0}^\infty - \delta_{\zeta_0} \mathcal{L}_{\eta^n}^\infty) \quad (4.21)$$

無限体積格子上の measure term は積分可能条件を満たしているので、結局、次の式が得られる。

$$\delta_\eta \mathcal{K}_\zeta - \delta_\zeta \mathcal{K}_\eta = iTr\{Q_\Gamma \hat{P}_- [\delta_\eta \hat{P}_-, \delta_\zeta \hat{P}_-]\} \quad (4.22)$$

ただし、 $Q_\Gamma$  は次の射影演算子。

$$Q_\Gamma \psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{if } x \in \Gamma \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.23)$$

ここで次の  $P(x, y)$  を導入しよう。

$$P(x, y) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\delta_{xy} + \frac{1}{2}\gamma_5 D(x, y) \quad (4.24)$$

すると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} Tr_\Gamma\{\hat{P}_- [\delta_\eta \hat{P}_-, \delta_\zeta \hat{P}_-]\} &= \sum_{x \in \Gamma} \sum_{y, z} \sum_n tr\{P(x, y) \\ &\times [\delta_\eta P(y, z)\delta_\zeta P(z, x + nL) - \delta_\zeta P(y, z)\delta_\eta P(z, x + nL)]\} \end{aligned} \quad (4.25)$$

ただし、 $Tr_\Gamma$  は有限体積格子上の trace をあらわす。ここで式 (4.22) は、上の式の  $n = 0$  の部分に一致することが分かる。ここで、次の量を定義しよう。

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\eta\zeta} &= iTr_\Gamma\{\hat{P}_- [\delta_\eta \hat{P}_-, \delta_\zeta \hat{P}_-]\} - iTr\{Q_\Gamma \hat{P}_- [\delta_\eta \hat{P}_-, \delta_\zeta \hat{P}_-]\} \\ &= \sum_{x \in \Gamma} \sum_{y, z} \sum_{n \neq 0} tr\{P(x, y) \\ &\times [\delta_\eta P(y, z)\delta_\zeta P(z, x + nL) - \delta_\zeta P(y, z)\delta_\eta P(z, x + nL)]\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Dirac 演算子の局所性より、 $\mathcal{R}_{\eta\zeta}$  は次の性質を持つ。

$$|\mathcal{R}_{\eta\zeta}| \leq \kappa L^\nu e^{-L/\rho} \quad (4.27)$$

ただし、 $\kappa, \nu, \rho$  は定数である。 $L$  は有限体積格子の一辺の値。この  $\mathcal{R}_{\eta\zeta}$  は、ほしい曲率の一部であるとみなせる。ここで次の量を定義しよう。

$$C_{kl}(t) \equiv \delta_\eta \mathcal{L}_\zeta - \delta_\zeta \mathcal{L}_\eta + \mathcal{R}_{\eta\zeta} \quad (4.28)$$

ただし、 $t$  は前節で出てきた torus 上の座標を表し、 $\eta$  は  $t_k$  方向、 $\zeta$  は  $t_l$  方向への変分を表す。すると、十分格子の体積が大きければ、式 (4.27) より、

$$I_{kl} = \int_0^{2\pi} dt_k dt_l C_{kl} = 0 \quad (4.29)$$

となることがわかり、 $T^n$  上の  $U(1)$  束は自明になることがわかる。もちろんこのとき  $U[m]$  上でも  $U(1)$  束は自明である。束の自明性より、次のような大域的な接続  $\mathcal{S}_\eta$  が得られる。

$$\delta_\eta \mathcal{S}_\zeta - \delta_\zeta \mathcal{S}_\eta = \mathcal{R}_{\eta\zeta}, \quad |\mathcal{S}_\eta| \leq \kappa' L^{\nu'} e^{-L/\rho} \quad (4.30)$$

ただし、 $\kappa', \nu', \rho$  は定数である。よって、積分可能条件を満たす大域的な current  $j_\mu$  が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \Gamma} \eta_\mu(x) j_\mu(x) &= \mathcal{L}_\eta = \mathcal{K}_\eta + \mathcal{S}_\eta \\ \delta_\eta \mathcal{L}_\zeta - \delta_\zeta \mathcal{L}_\eta &= iT r_\Gamma \{ \hat{P}_- [\delta_\eta \hat{P}_-, \delta_\zeta \hat{P}_-] \} \\ |j_\mu(x) - j_\mu^\infty(x)| &\leq \kappa'' L^{\nu''} e^{-L/\rho} \end{aligned} \quad (4.31)$$

ここで、この  $j_\mu$  が、anomalous Ward identity を満たすことを確かめよう。上の2つめの式(積分可能条件)の変分を gauge 変換にとると ( $\eta_\mu = -\partial_\mu \omega(x)$ )、次の式が得られる。

$$\delta_\zeta \left\{ \sum_{x \in \Gamma} \omega(x) [\partial_\mu^* j_\mu(x) - A_\Gamma(x)] \right\} = 0 \quad (4.32)$$

ただし、 $A_\Gamma(x)$  は有限体積格子における anomaly を表す。このことと、index theorem(Appendix D) より、次のことがわかる。

$$L^4 [\partial_\mu^* j_\mu(x) - A_\Gamma(x)] = - \sum_{y \in \Gamma} A_\Gamma(y) = M \quad (4.33)$$

$M$  は整数。

$$|A_\Gamma(x) - A_\infty(x)| \leq \lambda e^{-L/\rho} \quad (4.34)$$

( $\lambda$  は定数。  $A_\infty(x)$  は無限体積格子の anomaly。 ) これより、十分格子体積が大きいとき、 $M = 0$  となって、

$$\partial_\mu^* j_\mu(x) = A_\Gamma(x) \quad (4.35)$$

となることがわかる。

最後に、こうして構成された  $j_\mu$  が、式(2.43)の大域的積分可能条件を満たしているか確かめる必要がある。このことは、

$$\text{奇数電荷の fermion は偶数個ずつ入っている理論} \quad (4.36)$$

という条件の下でのみ、証明されている [12]。

## 4.5 まとめ

- 周期境界条件を持つ有限体積格子上の gauge 場の空間は、admissibility condition によって  $m_{\mu\nu}$  で特徴づけられる sector に分離していることがわかった。

- 各 sector は, 多次元 torus と可縮な多様体との直積で表すことができた。
- measure term はこの多様体上の U(1) 束の接続になっており, measure term の一意性の問題は U(1) 束の自明性の問題に置き換えられた。
- 体積が十分大きければ U(1) 束は自明になり, 必要な条件を満たす current  $j_\mu$  が得られ, measure term が一意的に与えられることが分かった。

こうして, 有限体積格子上でも chiral U(1) 理論は定式化できることがわかった。しかし, 実際にシミュレーションできるところまでには至っていない。まず,  $j_\mu$  の存在は証明されたが, 数値計算するためには具体的に与えなければならない。また, 有限体積格子のサイズをどのくらい大きくとらなければならないか, などの定量的なことも調べなければならない。さらに, 無限体積格子の  $j_\mu$  は具体的に与えられているが, その中に連続パラメータの積分が入っている。これらを数値計算でどう行うかも難題である。さらなる進展が望まれる。

## 5 admissibility のシミュレーションへの応用

admissibility condition は, 格子 chiral gauge 理論の構成において重要な役割を果たした。しかし, この admissibility condition を数値シミュレーションにとりいれようという試みはなされていない。そこで私は admissibility condition の具体的な効果を調べてみようと考えた。admissibility は, 連続理論の幾何学的な性質を格子理論でも保つ働きがあることから, chiral 対称性の改善が期待できる。さらに, 今までの格子理論では扱えなかった  $\theta$ -vacuum を扱うことが可能になると考えている。

### 5.1 motivation,prospection

admissibility condition を課したシミュレーションとして, 私は 2 次元 QED (massive Schwinger model) を選んだ。このモデルを扱うことには, 次のようなメリットがある。

- 2 次元 QED は, massless のとき, 解析的に解ける理論であり, massive な理論でも解析的によく調べられているので, 連続理論との比較が, 強結合領域でも可能である。また, 格子理論の連続極限は, この連続理論に一致する。(4 次元だと連続極限で相転移を起こしてしまうので, 連続理論と一致しない。)
- 2 次元 U(1) 理論では, topological charge の定義がとてもわかりやすく, しかもその定義において admissibility condition を必要としない。

つまり, admissibility condition がなくても, topological charge が存在するという特徴がある。(ただし, admissibility condition がないと, この charge は保存されない。)

- このモデルの topological charge は 1 種類であり, しかも, 連続理論の topological charge と完全に対応したものである。
- 2次元のシミュレーションは, 計算時間があまりかからない。また, U(1) 理論のプログラムは非常に簡単なもので, 短期間での作成, 解析が可能である。

## 5.2 2次元 QED の復習

まず, 連続理論での 2次元 QED (massive Schwinger model) の復習をしよう [17, 30, 31, 32, 33, 34]。2次元の理論は, Bosonization という手法を用いて解析がなされている。そのためには, まず gauge anomaly を求めなければならない。ただし, この anomaly の導出は理論の gauge 不変性には関わりなく, Bosonization のために必要な手続きにすぎない。anomaly free な場合でも, わざと軸性 gauge 場を入れる。そして, 各表現毎に anomaly を計算して, この anomaly を利用することで Bosonization を行う。これから扱うのは vector 的な理論であるが, この手続きは必要なので注意。

まず, 2次元 Euclid 時空において, vector 場と軸性 vector 場と相互作用する fermion action を考えよう。

$$S_F = \int d^2x \bar{\psi}(x) \mathcal{D} \psi(x)$$

$$\mathcal{D} = \sum_{\mu=1}^2 \gamma^\mu (\partial_\mu + iV_\mu + iA_\mu \gamma^3) \quad (5.1)$$

ただし, 2次元の Dirac 演算子を, 次のように定めた。

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = -i\gamma^1\gamma^2 \quad (5.2)$$

ここで, 次の chiral な gauge 変換を行う。

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)\gamma^3} \psi(x) \quad , \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{i\alpha(x)\gamma^3} \quad (5.3)$$

この変換で積分 measure から anomaly が計算できる。Fujikawa の方法に従って計算すると, 2次元 Euclid 時空における anomaly は次のように与えられる [17]。

$$\ln J(\alpha) = \frac{i}{\pi} \int d^2x \alpha(x) \left[ i\partial^\mu A_\mu(x) - \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \right] \quad (5.4)$$

ただし,  $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ ,  $\epsilon^{12} = i$  である。ここで, 第1項は正則化の方法に依存した量なので, 通常, anomaly としては考えない。(適当な counter term で相殺できる。) よって本来は無視するものであるが, ここではあえて残しておく。これが bosonization における重要な役割を果たす。

次の生成汎関数を考えよう。

$$Z(\xi, V_\mu) = \int D[\bar{\psi}]D[\psi] \exp \left[ - \int d^2x \bar{\psi}(x) \gamma^\mu (\partial_\mu + iV_\mu + i\partial_\mu \xi(x) \gamma^3) \psi(x) \right] \quad (5.5)$$

このとき,  $\partial_\mu \xi(x)$  は, 先ほどの軸性ベクトル場とみなせる。

ここで, 次の chiral な微小変換を行ってみよう。(微小量を  $ds$  で表す。)

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\xi(x)ds\gamma_3} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{i\xi(x)ds\gamma_3} \quad (5.6)$$

このとき, 変換された場を用いて,  $Z(\xi, V_\mu)$  は次のように表せる。

$$\begin{aligned} Z(\xi, V_\mu) &= \exp[\Gamma(\xi ds, V_\mu)] \int D[\bar{\psi}']D[\psi'] \\ &\quad \exp \left[ - \int d^2x \bar{\psi}'(x) \gamma^\mu (\partial_\mu + iV_\mu + i(1-ds)\partial_\mu \xi(x) \gamma^3) \psi'(x) \right] \\ \Gamma(\xi ds, V_\mu) &= -ds \frac{1}{\pi} \int d^2x \xi(x) \left[ \partial^\mu \partial_\mu \xi(x) - \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

ただし, 式(5.4)を使った。この変換をくり返して積分していくと, 有限な変換に対して次の式が得られる。

$$\begin{aligned} Z(\xi, V_\mu) &= \exp[\Gamma(\xi, V_\mu)] \\ &\quad \times \int D[\bar{\psi}']D[\psi'] \exp \left[ - \int d^2x \bar{\psi}'(x) \gamma^\mu (\partial_\mu + iV_\mu) \psi'(x) \right] \\ \Gamma(\xi, V_\mu) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^1 ds \int d^2x \xi(x) \left[ \partial^\mu \partial_\mu (1-s)\xi(x) - \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \right] \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^1 ds \int d^2x \left[ \frac{1}{2} \xi(x) \partial^\mu \partial_\mu \xi(x) - \xi(x) \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 ds \int d^2x \left[ \frac{1}{2} \partial^\mu \xi(x) \partial_\mu \xi(x) + \xi(x) \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

fermion 積分の部分には,  $\xi$  依存性がなくなっていることに注意しよう。

ところで, 2次元の gauge 場は, 次の2つの scalar 場を用いて表現できる。

$$V_\mu(x) = \partial_\mu \alpha(x) + \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \beta(x) \quad (5.9)$$

さらに, 次の式が成り立つ。

$$\gamma^\mu V_\mu(x) = \gamma^\mu \partial_\mu \alpha(x) + \gamma^\mu \gamma_3 \partial_\mu \beta(x) \quad (5.10)$$

この式を  $V_\mu$  に代入し, さらに vector 的 gauge 変換  $\psi(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)}\psi(x)$  を行うと,  $Z(\xi, V_\mu)$  は次のように表せる。

$$Z(\xi, V_\mu) = \int D[\bar{\psi}]D[\psi] \exp \left[ - \int d^2x \bar{\psi}(x) \gamma^\mu (\partial_\mu + i\partial_\mu(\xi(x) + \beta(x))\gamma^3) \psi(x) \right] \quad (5.11)$$

vector 的 gauge 変換は, anomaly を出さないのので,  $\alpha$  依存性が消去できてしまったことがわかる。さらに,  $\xi$  でこの生成汎関数を積分してみよう。

$$\begin{aligned} \int D[\xi] Z(\xi, V_\mu) &= \int D[\xi] D[\bar{\psi}] D[\psi] \\ &\quad \exp \left[ - \int d^2x \bar{\psi}(x) \gamma^\mu (\partial_\mu + i\partial_\mu(\xi(x) + \beta(x))\gamma^3) \psi(x) \right] \\ &= \int D[\xi] D[\bar{\psi}] D[\psi] \\ &\quad \exp \left[ - \int d^2x \bar{\psi}(x) \gamma^\mu (\partial_\mu + i\partial_\mu(\xi(x))\gamma^3) \psi(x) \right] \\ &= \int D[\xi] Z(\xi, 0) \end{aligned} \quad (5.12)$$

積分すると  $V_\mu$  依存性がなくなることに注意しよう。ここで, 式 (5.8) より,

$$\begin{aligned} \int D[\xi] e^{\Gamma(\xi, V_\mu)} \int D[\bar{\psi}'] D[\psi'] \exp \left[ - \int d^2x \bar{\psi}'(x) \gamma^\mu (\partial_\mu + iV_\mu) \psi'(x) \right] \\ = \text{independent of } V_\mu \end{aligned} \quad (5.13)$$

であることがわかる。つまり,

$$\begin{aligned} e^{-W(V_\mu)} &\equiv \int D[\bar{\psi}'] D[\psi'] \exp \left[ - \int d^2x \bar{\psi}'(x) \gamma^\mu (\partial_\mu + iV_\mu) \psi'(x) \right] \\ &= \int D[\xi] \exp[-\Gamma(\xi, V_\mu)] \\ &= \int D[\xi] \exp \left[ -\frac{1}{\pi} \int d^2x \left[ \frac{1}{2} \partial^\mu \xi(x) \partial_\mu \xi(x) + \xi(x) \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \right] \right] \end{aligned} \quad (5.14)$$

である。ただし, 全体にかかる定数は汎関数積分には本質的意味を持たないので無視した。こうして, fermion  $\psi$  で書かれた理論を, boson  $\xi$  での理論に書きなおすことができたのである。

さて, あとは gauge 場についての path integral を行う。

$$Z = \int D[V_\mu] e^{-S_G} \int D\xi \exp[-\Gamma(\xi, V_\mu)]$$

$$S_G = \int d^2x \frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (5.15)$$

しかし、gauge 固定をすると、2次元では gauge 場の dynamical な自由度は存在しないことがわかる。これは2次元では横波が存在しないことから理解できる。つまり、完全に boson  $\xi$  のみの理論に帰着するのである。これを確認しよう。

axial gauge とよばれる gauge 固定を行う。

$$V_1 = 0 \quad (5.16)$$

さらに、 $V_2$  に関する運動方程式より、次の拘束条件が得られる。(第2次拘束条件とよばれる。)

$$\partial_1 F_{12}(x) = -i \frac{e^2}{\pi} \partial_1 \xi(x) \quad (5.17)$$

これはすぐに解くことができ、

$$F_{12}(x) = -i \frac{e^2}{\pi} \xi(x) - iF \quad (5.18)$$

となることがわかる。ただし、 $F$  は積分定数。

これらを式 (5.15) に代入し、 $\xi \rightarrow \phi = \xi/\sqrt{\pi}$  に rescale すると、

$$Z = \int D[\phi] \exp \left[ - \int d^2x \left[ \frac{1}{2} \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) + \frac{e^2}{2\pi} \phi^2 \right] \right] \quad (5.19)$$

となる。ただし、定数項は無視した。このように、massless の Schwinger model は、mass  $\frac{e}{\sqrt{\pi}}$  を持つ自由 scalar 場の理論に帰着できるのである。

ここで、時空が torus  $T^2$  だった場合を考えよう。 $T^2$  上の  $U(1)$  理論では、古典的には真空が無限に縮退しており、量子論的には  $\theta$  でラベルされる真空が存在する。これは、 $\theta$ -vacuum としてよく知られている。 $\theta$ -vacuum を考慮したときに、式 (5.19) がどうなるか考えよう。これは、元の Lagrangian に、次の項を加えればよいことがわかる。

$$L_\theta \equiv \frac{\theta}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (5.20)$$

よって、式 (5.19) は次のように変わる。

$$Z = \int D[\phi] \exp \left[ - \int d^2x \left[ \frac{1}{2} \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) + \frac{e^2}{2\pi} \left( \phi + \frac{\theta}{2\sqrt{\pi}} \right)^2 \right] \right] \quad (5.21)$$

さて、quark が mass を持つ massive Schwinger model の場合はどうなるであろうか? fermion の質量項は、同じ scalar  $\phi(x)$  を用いて次のように書くことが知られている。

$$\begin{aligned} m \bar{\psi}(x) \psi(x) &= -c m e \cos(2\sqrt{\pi} \phi(x)) \\ c &= \frac{\exp(\gamma)}{2(\pi)^{3/2}} \end{aligned} \quad (5.22)$$

ただし,  $\gamma = 0.5772$  は Euler 定数とよばれる量である。

同様に, 次の対応関係も証明できる。

$$\bar{\psi}(x)\gamma_3\psi(x) = -ce \sin(2\sqrt{\pi}\phi(x)) \quad (5.23)$$

以上より,  $\mu_0 = e/\sqrt{\pi}$  とおくと, massive Schwinger model は次の scalar 場の理論に帰着できる。

$$S = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) + \frac{\mu_0^2}{2} (\phi(x) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \theta)^2 - cme \cos(2\sqrt{\pi}\phi(x)) \right] \quad (5.24)$$

さて, これを 2 flavor に拡張するのは簡単で, 次の 2 種類の scalar 場  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$  の理論が得られる。

$$\begin{aligned} S = \int d^2x & \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1(x) \partial^\mu \phi_1(x) + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2(x) \partial^\mu \phi_2(x) \right. \\ & \left. + \frac{\mu_0^2}{2} (\phi_1(x) + \phi_2(x) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \theta)^2 \right. \\ & \left. - cme \cos(2\sqrt{\pi}\phi_1(x)) - cme \cos(2\sqrt{\pi}\phi_2(x)) \right] \quad (5.25) \end{aligned}$$

ここで, 次の  $\phi_+(x)$ ,  $\phi_-(x)$  に変数変換しよう。

$$\begin{aligned} \phi_+(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \phi_1(x) + \phi_2(x) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \theta \right) \\ \phi_-(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) - \phi_2(x)) \end{aligned} \quad (5.26)$$

すると, 式 (5.25) は次のように表される。

$$\begin{aligned} S = \int d^2x & \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_+(x) \partial^\mu \phi_+(x) + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_-(x) \partial^\mu \phi_-(x) + \frac{2\mu_0^2}{2} (\phi_+(x))^2 \right. \\ & \left. - 2cme \cos \left( \sqrt{2\pi}\phi_+(x) - \frac{1}{2}\theta \right) \cos(\sqrt{2\pi}\phi_-(x)) \right] \quad (5.27) \end{aligned}$$

強結合領域では,  $\phi_+$  は非常に重く, 理論から decouple することがわかる。ただし,  $\phi_+$  を積分してしまうと, 相互作用項が次のようになりこまれる。

$$\begin{aligned} 2cme \cos \left( \sqrt{2\pi}\phi_+(x) - \frac{1}{2}\theta \right) &\rightarrow (2cm\mu_0^{1/2} \cos \frac{1}{2}\theta)^{4/3} \\ &\equiv m'^2 \end{aligned} \quad (5.28)$$

このことから, 強結合領域では, 軽い scalar  $\phi_-$  のみの理論となる。

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_-(x) \partial^\mu \phi_-(x) - m'^2 \cos(\sqrt{2\pi} \phi_-(x)) \\
m' &= (2cm\mu_0^{1/2} \cos \frac{1}{2}\theta)^{2/3}
\end{aligned} \tag{5.29}$$

$\cos(\sqrt{2\pi} \phi_-(x))$  を展開すると、 $\phi_-$  の mass は、 $\sqrt{2\pi} m'$  で与えられることがわかる。この mass は、fermion の mass の  $2/3$  乗に比例しており、この理論の興味深い特徴である。さて、ここで元の fermion で作られる、次の量を考えよう。

$$\pi(x) \equiv \bar{\psi}_1(x) \gamma_3 \psi_1(x) - \bar{\psi}_2(x) \gamma_3 \psi_2(x) \tag{5.30}$$

この量は、式 (5.23) より、scalar 場を用いて次のように書ける。

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= -ec(\sin(2\sqrt{\pi} \phi_1(x)) - \sin(2\sqrt{\pi} \phi_2(x))) \\
&= -ec\sqrt{2\pi} \phi_-(x) + (\text{高次項})
\end{aligned} \tag{5.31}$$

$\pi(x)$  の相関関数は次で与えられる。

$$\langle \pi(x) \pi(y) \rangle = Z \langle \phi_-(x) \phi_-(y) \rangle + \langle (\text{高次の演算子}) \rangle \tag{5.32}$$

ただし、 $Z$  は定数。高次の相関関数は、重い粒子の伝搬に相当しているの、充分に  $x$  と  $y$  の距離が大きければ、 $\phi_-(x)$  の伝搬について調べられる。つまり、 $m'$  を測定できるのである。

$m'$  は、fermion の mass の  $2/3$  乗に比例しており、シミュレーションではこの  $2/3$  乗則が実現されるかどうか注目した。特に、 $m \rightarrow 0$  の極限で、この meson の mass  $m'$  が  $0$  に近づくかどうか、カイラル対称性を調べるのに良い指標となる。

### 5.3 シミュレーションの方法

この節では、実際に私が行ったシミュレーションの内容について概説する。fermion の action は、Domain Wall fermion とよばれるものを用いた。この方法は、 $a \rightarrow 0$  極限で、Ginsparg-Wilson 関係式を満たす action になることが知られており、chiral 対称性をよく保つ方法である。Domain wall fermion を用いた Schwinger model のシミュレーションは、Jaster によってなされていて (ただし、admissibility のようなものは課されていない。)、今回の私のシミュレーションの参考になった [35]。

$$S_F = \sum_{x, x'} \sum_{s, s'}^{N_x L_s} [\bar{\psi}_s^1(x) D_{dw}(x, s; x', s') \psi_{s'}^1(x')]$$

$$\begin{aligned}
& +\bar{\psi}_s^2(x)D_{dw}(x, s; x', s')\psi_{s'}^2(x') \\
& +\phi_s^*(x)D_{ap}(x, s; x', s')\phi_{s'}(x')] \tag{5.33} \\
D_{dw}(x, s; x', s') & = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^2 \{ (1 + \gamma_\mu)U_\mu(x)\delta_{x+\hat{\mu}, x'}\delta_{s, s'} \\
& + (1 - \gamma_\mu)U_\mu^\dagger(x - \hat{\mu})\delta_{x-\hat{\mu}, x'}\delta_{s, s'} \} \\
& + (M - 3)\delta_{x, x'}\delta_{s, s'} \\
& + P_+\delta_{s+1, s'}\delta_{x, x'} + P_-\delta_{s-1, s'}\delta_{x, x'} \\
& + (m - 1)P_+\delta_{s, L_s}\delta_{s', 1}\delta_{x, x'} + (m - 1)P_-\delta_{s, 1}\delta_{s', L_s}\delta_{x, x'} \\
D_{ap}(x, s; x', s') & = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^2 \{ (1 + \gamma_\mu)U_\mu(x)\delta_{x+\hat{\mu}, x'}\delta_{s, s'} \\
& + (1 - \gamma_\mu)U_\mu^\dagger(x - \hat{\mu})\delta_{x-\hat{\mu}, x'}\delta_{s, s'} \} \\
& + (M - 3)\delta_{x, x'}\delta_{s, s'} \\
& + P_+\delta_{s+1, s'}\delta_{x, x'} + P_-\delta_{s-1, s'}\delta_{x, x'} \\
& - 2P_+\delta_{s, L_s}\delta_{s', 1}\delta_{x, x'} - 2P_-\delta_{s, 1}\delta_{s', L_s}\delta_{x, x'} \tag{5.34}
\end{aligned}$$

ただし,  $a = 1$  とした。  $\phi(x)$  は Pauli Villars regulator として加えた scalar 場である。これにより, bulk の fermion による非物理的なくりこみを防ぐことができる。各パラメータは,  $N_x = N_y = 32$ ,  $L_s = 5$ ,  $M = 0.9$  で行った。 $m$  が, quark の質量である。

gauge 場の action は, 次の 2 通りで違いを比較した。

- Lüscher's action

$$S_G = \begin{cases} \beta \sum_P \frac{(1 - \text{Re}P_{\mu\nu}(x))}{1 - (1 - \text{Re}P_{\mu\nu}(x))/\epsilon} & \text{if admissible} \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5.35}$$

$\epsilon = 1.0$  とした。

- Normal action

$$S_G = \beta \sum_P (1 - \text{Re}P_{\mu\nu}(x)) \tag{5.36}$$

$\beta$  は結合定数である。シミュレーションは, Hybrid Monte Carlo 法を用いて行った。Dirac 演算子の逆は conjugate gradient 法を用いて解いた。そして, 測定したのは次の 2 つの量である。

- topological charge

$$M_{top} \equiv -\frac{i}{2\pi} \sum_x \ln P_{\mu\nu}(x) \tag{5.37}$$

これは, 式 (4.2) で見たように, 整数になる。各 action で用いたときの, この topological charge の変化を調べた。

- meson mass  
meson  $\pi$  のプロパゲータ

$$\langle \pi(x)\pi(0) \rangle \quad (5.38)$$

を双曲線関数に fit させて mass を求めた。さらに、式 (5.29) に従って 2/3 乗則を調べ、chiral limit ( $m \rightarrow 0$ ) のふるまいを action を変えて比較した。

## 5.4 Results

シミュレーションは、fermion loop を無視する quench 近似と、fermion も完全に含めた full QED の 2 とおりに行った。quench 近似は 1000sweeps, full QED は 2000sweeps 実行し、それぞれ 10sweeps 毎に測定を行った。

### 5.4.1 string tension

このシミュレーションの目的は、admissibility condition を満たす Lüscher action と、normal action との比較である。そのためには、それぞれの action で同じ結合定数を与えて比較しなければならない。しかし、action の違いによって結合定数は (有限の) くりこみを受けるので、action にあらわれている (bare な)  $\beta$  の値を等しくしても effective な結合定数は等しくならない。そこで同じ物理を記述する  $\beta$  の値を知るための物理量の測定が必要となる。

ここでは、次の string tension  $\sigma$  という量を測定し、 $\sigma$  の値が等しいときの両者の違いを比べることにした。

$$\begin{aligned} \sigma &\equiv -i \ln W/S \\ W &= \exp(i \oint dx^\mu A_\mu(x)) \end{aligned} \quad (5.39)$$

$W$  は Wilson loop を表す。 $S$  は Wilson loop が囲む領域の面積である。

2 次元の QED は、4 次元の QCD と同じように confine phase があるので、potential energy は距離に比例し、Wilson loop は面積則に従うことに注意。

測定の結果、action に与えた  $\beta$  と、string tension  $\sigma$  の関係は次のようになった。

	normal	Lüscher
$\sigma = 0.06$	$\beta = 8.0$	$\beta = 5.3$
$\sigma = 0.10$	$\beta = 5.6$	$\beta = 3.0$
$\sigma = 0.18$	$\beta = 3.4$	$\beta = 1.0$
$\sigma = 0.24$	$\beta = 2.7$	$\beta = 0.5$

(5.40)

### 5.4.2 topological charge

quench 近似の結果を図 1, 図 2 に示す。両者に大きな違いがあるのがわかる。特に, 強結合になるにつれて, normal action では topological charge の変動がはげしい。一方, Lüscher の action では topological charge は全く変動しない。さらに, Lüscher の action を用いると, topological charge の初期値を変えても, topological charge はその初期値のまま保たれることがわかった。(図 3,4)

full QED になると (図 5,6), normal action での状況は劇的に変わる。topological charge の変動がよく抑えられていることがわかる。この効果は topological charge が 0 でない sector の, fermion 0-mode による action の発散からおこると考えられる (quench では計算されない寄与である)。これは Domain Wall fermion が, Atiyah-Singer の指数定理を再現していることの状況証拠と言える。しかし, topological charge が完全に一定に保たれるわけではないことから, normal action では,  $\theta$ -vacuum を扱うことはできないであろう。一方, admissibility condition を満たす Lüscher の action では, topological charge は全く変動しない。

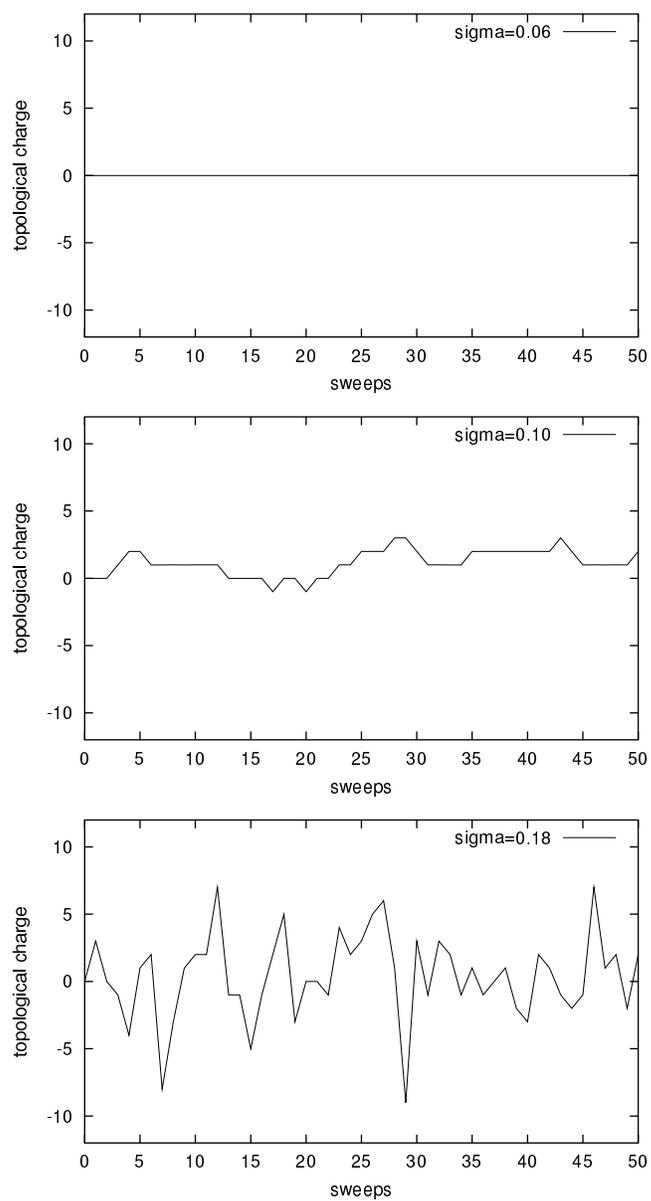


図 1: normal action のときの topological charge の変化の様子 (quench 近似)。強結合になるにつれて, topological charge がはげしく変動するのがわかる。

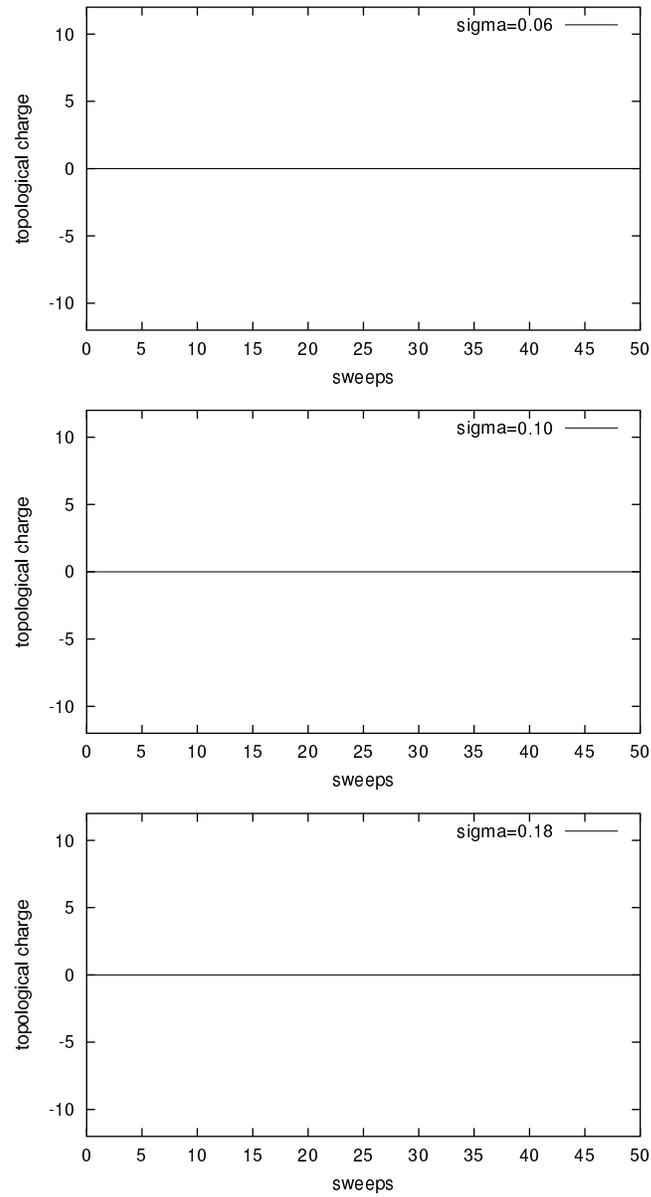


図 2: Lüscher action のときの topological charge の変化の様子 (quench 近似)。強結合になっても, topological charge は変動しない。

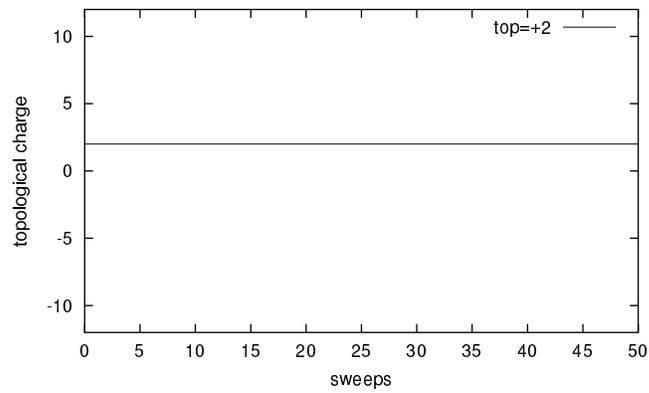


図 3: Lüscher action : 初期値を +2 にとっても, topological charge は変化しない。

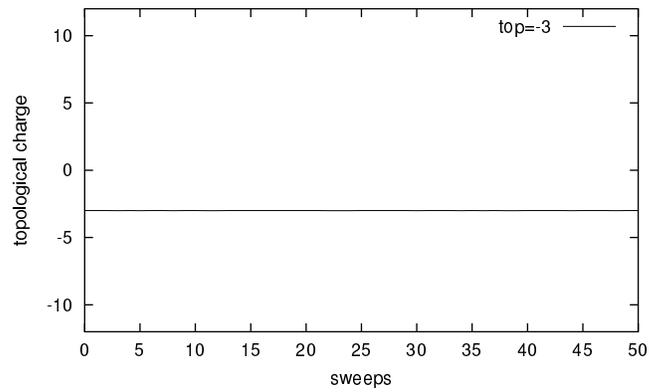


図 4: Lüscher action : 初期値を -3 にとった場合。

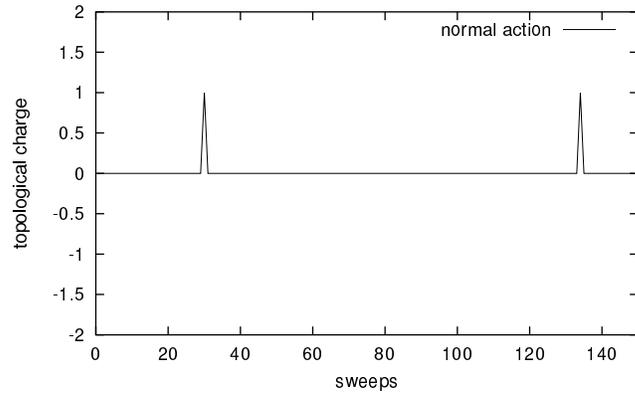


図 5: normal action : full QED では, topological charge の変動が抑えられる。しかし, 完全なものではない。

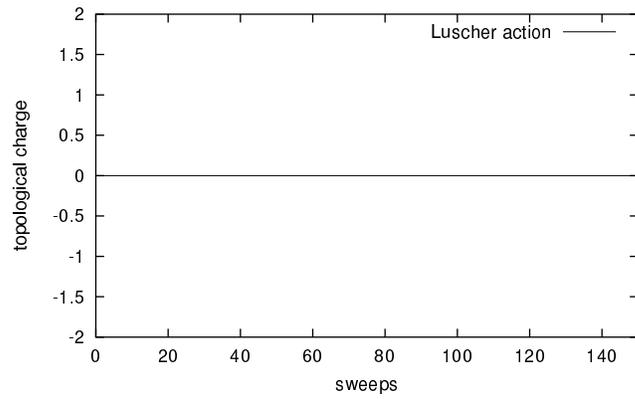


図 6: Lüscher action(full QED) : topological charge は全く変化しない。

### 5.4.3 meson mass

meson の mass が, 連続理論の結果と同じように quark の mass  $m$  の  $2/3$  乗に比例するかどうかを調べた。quench 近似では,  $\sigma = 0.18, 0.10$  のそれぞれの場合に quark の mass を  $m = 0.03, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3$  にして, meson の mass を測定した。full QED では  $\sigma = 0.18$  で, quark の mass を  $m = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3$  にして測定した。

なお, topological charge = 0 のみの sector で測定した。

quench 近似の測定結果は, 図 7 および 8 参照。驚くべきことに, Lüscher action の方は, quench 近似の段階で, 強結合でも  $2/3$  乗則をよく示している。normal action の方は, 結合が強くなるとふるまいが悪くなることがわかる。誤差も Lüscher action に比べて非常に大きい。これはやはり, topological charge が 0 でない sector からの寄与によるものと考えられる。

full QED では, normal action でも  $2/3$  乗則によく従うようになる。図 9, 10 参照。

これらの結果を用いて, 関数

$$f(m) = am^{2/3} + b \quad (5.41)$$

を fit させて,  $m \rightarrow 0$  での meson の値 (chiral limit という) を求めると,

- quench 近似 ( $\sigma = 0.18$ )

$$\begin{aligned} m_\pi \rightarrow_{m \rightarrow 0} -0.11(\pm 0.18) & \text{ normal action} \\ m_\pi \rightarrow_{m \rightarrow 0} -0.04436(\pm 0.0007) & \text{ Lüscher action} \end{aligned} \quad (5.42)$$

- full QED ( $\sigma = 0.18$ )

$$\begin{aligned} m_\pi \rightarrow_{m \rightarrow 0} -0.0701(\pm 0.0004) & \text{ normal action} \\ m_\pi \rightarrow_{m \rightarrow 0} -0.0561(\pm 0.0004) & \text{ Lüscher action} \end{aligned} \quad (5.43)$$

となった。full QED の方も, admissibility を課した方がわずかながら連続理論に近いようである。

なお, シミュレーションに関する補足を Appendix E に記した。

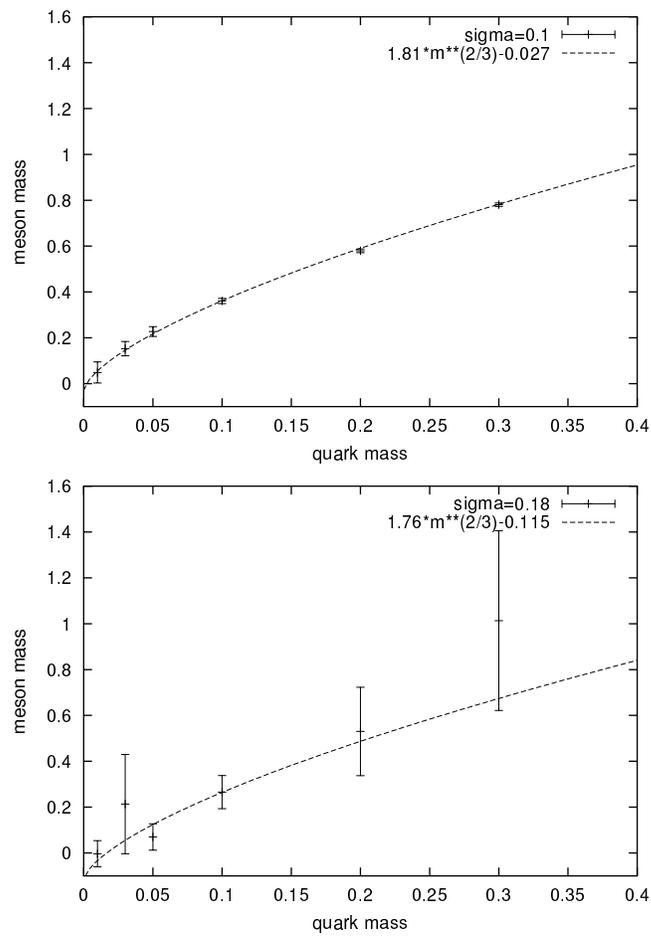


図 7: normal action の結果 (quench 近似) : 強結合では値も誤差も悪くなる。

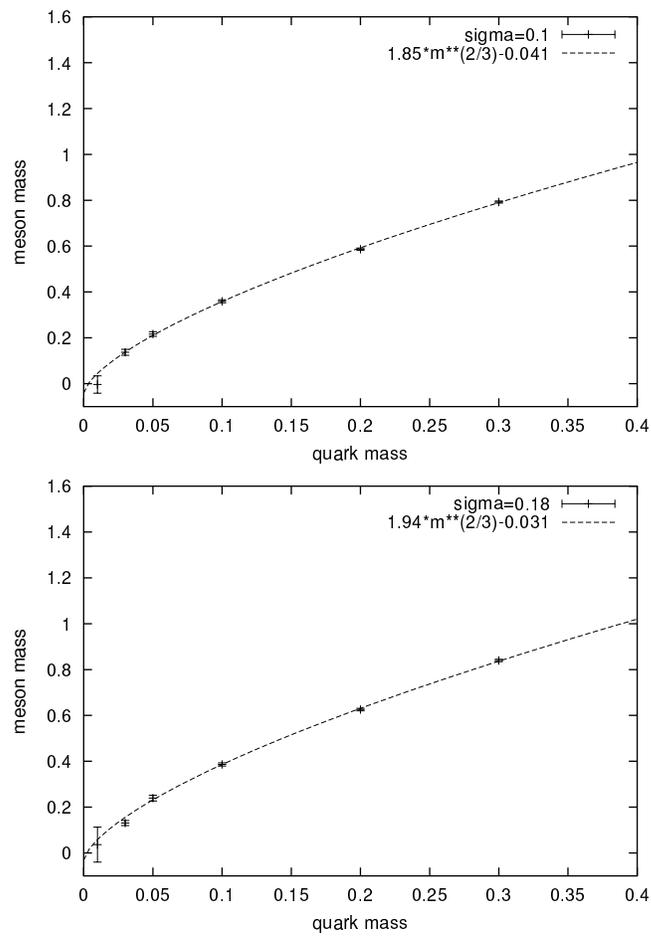


図 8: Lüscher action の結果 (quenched 近似): 強結合でも連続理論とよく一致。

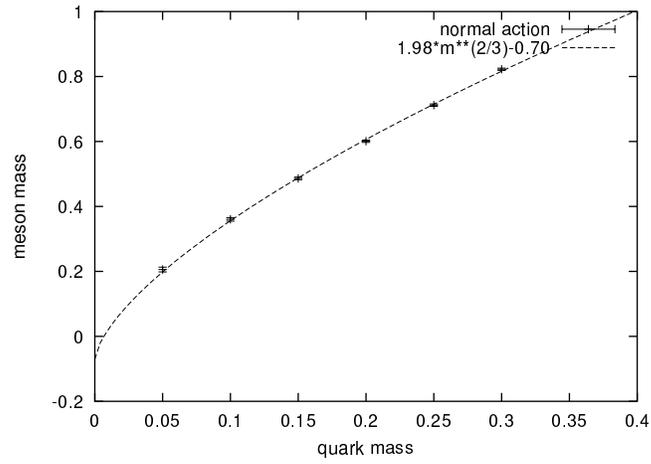


図 9: normal action の結果 (full QED):連続理論とよく一致するようになった。

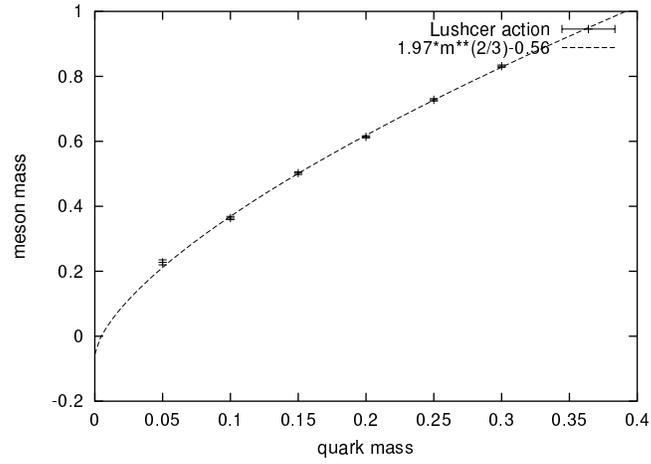


図 10: Lüscher action の結果 (full QED)

## 5.5 考察と今後の課題

私が行った2次元QEDのシミュレーションの結果、次のことが示された。

1. Lüscher の admissibility condition を満たす action を用いると、確かに topological charge が一定に保たれる。よって、各 topological sector 毎の経路積分の実行が可能で、少なくとも2次元QEDにおける  $\theta$ -vacuum を扱うことができるはずである。
2. Domain wall fermion に加えて、さらに Lüscher の admissibility を課すことにより、chiral 対称性の改善が確認された。特に、quench 近似でも連続理論をよく再現できるというのは、興味深い。

admissibility condition はとても簡単な条件であり、これを導入したことによるデメリットは特に見当たらなかった。この条件は、chiral gauge 理論の構成のための要素という、理論的な重要性だけでなく、数値シミュレーションでも充分役に立つ、実用性の高いものであると考えられる。

今後の課題としては、

- topological charge  $\neq 0$  の sector で格子理論における fermion 0-mode のふるまいを研究すること。
- $\theta \neq 0$  の Schwinger model の結果を再現することができるか確認すること。
- 4次元SU(2)理論、そして4次元SU(3)理論への応用。
- admissibility condition の強さ  $\epsilon$  の値を変えたときの、ふるまいの違いを調べること。

などが挙げられる。連続理論では当たり前のことが、今までの格子理論では不可能だったという課題は多いので、他にもたくさん応用ができると考えている。

## 6 conclusion

格子上の chiral 対称性に関する研究は、局所的な chiral 対称性の量子論的破れ (chiral gauge anomaly) を、非摂動的に議論できるところまで進展していることがわかった。この chiral gauge anomaly の有無は、measure current を与えることにより、理解できる。残る課題は、この measure current をどう構成するかという問題である。

measure current は、gauge 不変性や、積分可能性などの条件を満たさなければ

ばならず、実際に構成することは難しい。

しかし、格子理論でも cohomology 的なものを導入することができれば、measure current の構成は可能であると考えられる。実際、U(1) 理論はそのアプローチにより、定式化がなされた。この cohomology を実現するための重要な鍵となったのが、admissibility condition である。この条件は、連続理論の持つ位相不変量を、格子上に再現する役割を果たす。さらに、Dirac 演算子の局所性も保証するので、連続理論の性質をよりよく保つ条件になっている。このことで、格子理論でも幾何学的なアプローチが可能になった。非可換群の chiral gauge 理論の構成のためにも、この admissibility condition は不可欠な要素となるだろう。

一方で、この admissibility condition は、理論的な重要性だけでなく、シミュレーションにも応用できる実用性のあるものであることがわかった。2次元 QED のシミュレーションを通して、実際に topological charge が保存することと、chiral 対称性の改善が確認された。これにより、今までの格子理論では不可能だった  $\theta$ -vacuum などが扱えるようになると考えられる。

この論文でとりあげた、Ginsparg-Wilson 関係式や、admissibility condition は、action を  $O(a)$  で変形するだけで実現されるものである。格子理論でまだ成し遂げられていない課題は多いが、action の小さな変形によって、大きな進歩が得られる可能性があるということは心に留めておきたい。chiral gauge 理論の完成や、超対称性の実現などにも、「連続理論の性質をより良く保つための、action のわずかな変形」は重要な鍵となるかもしれない。

## Acknowledgements

本論文を書くにあたり、ご指導頂いた二宮正夫先生、静谷謙一先生、大野木哲也先生はじめ、基礎物理学研究所の先生方に変感謝しています。特に大野木先生には、格子理論の基礎的なことから、シミュレーションのためのプログラミングまで、手とり足とり教えて頂きました。ありがとうございます。また、菊川芳夫先生、鈴木博先生には、カイラルゲージ理論の最近の研究について、大変わかりやすく教えて頂きました。深く感謝します。松古栄夫さん、杉田歩さんには、どんなに初歩的な質問にも親切に答えて頂き、ありがとうございました。最後に、日頃様々な助言、はげましを頂いている、基礎物理学研究所のみなさんに心から感謝します。

## Appendix

### A notation

格子間隔を  $a$  とする。完全反対称テンソル  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  は  $\epsilon_{0123} = 1$  とする。

格子理論では微分ではなく差分演算子を使う。差分の方法は2とおり考えられる。前方差分, 後方差分を次のように表す。

$$\begin{aligned}\partial_\mu f(x) &= \frac{1}{a} \{f(x + \hat{\mu}a) - f(x)\} \\ \partial_\mu^* f(x) &= \frac{1}{a} \{f(x) - f(x - \hat{\mu}a)\}\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

$\hat{\mu}$  は  $\mu$  方向の単位ベクトルである。

Dirac 行列は次を満たすものをとる。格子理論は Euclid 時空の理論であることに注意しよう。

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu, \quad \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \quad (\text{A.2})$$

gauge 場は, link 変数で表す。

$$U_\mu(x) = \exp(A_\mu^a(x)T^a) \in G \quad (\text{A.3})$$

$G$  は Lie 群,  $T^a$  は群の生成子を表す。共変微分に相当する差分は次で与えられる。

$$\begin{aligned}\nabla_\mu f(x) &= \frac{1}{a} \{R[U_\mu(x)]f(x + \hat{\mu}a) - f(x)\} \\ \nabla_\mu^* f(x) &= \frac{1}{a} \{f(x) - R[U_\mu(x - \hat{\mu}a)^{-1}]f(x - \hat{\mu}a)\}\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

ただし,  $R[U]$  は表現行列を表す。

### B Overlap 演算子の locality

Overlap 演算子は式 (2.15) で与えられた演算子である。この演算子の局所性は自明ではない。しかし, 分母にある  $A^\dagger A$  が 0-固有値を持たないとき, この演算子の局所性を証明することができる。ここでは, admissibility condition が課された場合に,  $A^\dagger A$  に下限が現れ, admissibility condition が充分強ければ, 全ての固有値が正になることを確認する。まず,  $A^\dagger A$  は, 次のように分解できる。

$$A^\dagger A = 1 + \frac{1}{4} \sum_{\mu \neq \nu} [B_{\mu\nu} + C_{\mu\nu} + D_{\mu\nu}] \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned}
B_{\mu\nu} &= a^4 \nabla_\mu^* \nabla_\mu \nabla_\nu^* \nabla_\nu \\
C_{\mu\nu} &= -\frac{a^2}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] [\nabla_\mu^* + \nabla_\mu, \nabla_\nu^* + \nabla_\nu] \\
D_{\mu\nu} &= -a^2 \gamma_\mu [\nabla_\mu^* + \nabla_\mu, \nabla_\nu^* - \nabla_\nu]
\end{aligned} \tag{B.2}$$

ここで次の式が役に立つ。

$$\begin{aligned}
&a^2 [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \psi(x) \\
&= \{U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}a) - U_\nu(x) U_\mu(x + \hat{\nu}a)\} \psi(x + \hat{\mu}a + \hat{\nu}a) \\
&= U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}a) (1 - P_{\mu\nu}^\dagger(x)) \psi(x + \hat{\mu}a + \hat{\nu}a)
\end{aligned} \tag{B.3}$$

よって, admissibility condition が課されているとき,

$$\|a^2 [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\| \leq \epsilon \tag{B.4}$$

であることがわかる。これから, 容易に

$$\|C_{\mu\nu}\| \leq 2\epsilon, \quad \|D_{\mu\nu}\| \leq 4\epsilon \tag{B.5}$$

が結論できる。さらに,  $B_{\mu\nu}$  を次のように書き直す。

$$B_{\mu\nu} = a^4 \nabla_\mu^* \nabla_\nu^* \nabla_\nu \nabla_\mu - a^3 \nabla_\mu^* [\nabla_\mu, \nabla_\nu - \nabla_\nu^*] \tag{B.6}$$

上の式の第1項の固有値は必ず正になるとわかる。第2項については,

$$\|a^3 \nabla_\mu^* [\nabla_\mu, \nabla_\nu - \nabla_\nu^*]\| \leq 2\epsilon \|\nabla_\mu^*\| \leq 4\epsilon \tag{B.7}$$

となるので, 結局,

$$A^\dagger A \geq 1 - 30\epsilon \tag{B.8}$$

となって,  $\epsilon < 1/30$  のときに Overlap 演算子の局所性が保証される。

## C 4+2次元の Chiral anomaly

式(2.73)の  $q(x)$  は, 4+2次元の chiral anomaly に対応した量である。ここでは, この  $q(z)$  が topological field であることを証明する。(式(2.75)の証明) まず,  $q$  について4次元の座標  $x$  についての和をとる。

$$a^4 \sum_x q(z) = i \text{Tr} \{ \hat{P}_- [\partial_t \hat{P}_-, \partial_s \hat{P}_-] - \frac{1}{2} \partial_t [R(A_s) \hat{\gamma}_5] + \frac{1}{2} \partial_s [R(A_t) \hat{\gamma}_5] \} \tag{C.1}$$

上の式より,  $q$  の変分を取って  $t, s$  積分すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
a^4 \sum_x \int dt ds \delta q(z) &= i \int dt ds \delta \text{Tr} \{ \hat{P}_- [\partial_t \hat{P}_-, \partial_s \hat{P}_-] \} \\
&= i \int dt ds \text{Tr} \{ \hat{P}_- [\partial_t \delta \hat{P}_-, \partial_s \hat{P}_-] + \hat{P}_- [\partial_t \hat{P}_-, \partial_s \delta \hat{P}_-] \} \\
&= i \int dt ds \text{Tr} \partial_t (\hat{P}_- [\delta \hat{P}_-, \partial_s \hat{P}_-]) \\
&= i \int ds \text{Tr} (\hat{P}_- [\delta \hat{P}_-, \partial_s \hat{P}_-])|_{t=\text{boundary}} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{C.2}$$

こうして,  $q(z)$  が topological であることが示された。ただし, 次の式を利用した。

$$\text{Tr} \{ \delta_1 \hat{P}_- \delta_2 \hat{P}_- \delta_3 \hat{P}_- \} = 0, \quad \delta \hat{P}_-|_{t=\text{boundary}} = 0 \tag{C.3}$$

$\delta_i$  は任意の変分を表す。

## D Chiral anomaly と指数定理

格子上的における, chiral gauge anomaly (Non Abelian anomaly) はまだ完全に理解されていないが, global な chiral 変換に対する chiral anomaly (Abelian anomaly) の方は, Ginsparg-Wilson 関係式により, よく理解されている。ここでは, 連続理論における Atiyah-Singer の指数定理が, 格子理論でも再現されていることを確かめる。

その前に, 0-mode  $\psi_0$  (D の固有値が 0 の状態) は,  $\gamma_5$  の固有状態に選べることを確かめておこう。Ginsparg-Wilson 関係式より,

$$[\gamma_5, D] \psi_0 = 0 \tag{D.4}$$

が簡単に示されるので,  $\psi_0$  は  $\gamma_5$  の同時固有状態に選べる。

さて, global な chiral 変換に対する measure の変換から, chiral anomaly を求めよう。これは, 式 (2.34) の導出方法をそのまま用いることができる。(これは gauge anomaly が連続理論の共変 anomaly に対応していることに由来する。) つまり,  $\omega(x)$  を定数にとり,  $R(T^a) = i \times \text{identity}$  にとればよい。すなわち, chiral anomaly は,

$$A(x) = -\frac{a}{2} \text{tr} \gamma_5 D(x, x) \tag{D.5}$$

で与えられる。

連続理論における Atiyah-Singer の指数定理は, anomaly を空間積分したものが, 正の chirality を持つ 0-mode の個数  $n_+$  と, 負の chirality を持つ 0-mode の個数  $n_-$  の差の整数で与えられるというものであった。ここでは, anomaly の積分は,

$$a^4 \sum_x A(x) = -\frac{a}{2} \text{Tr} \gamma_5 D \quad (\text{D.6})$$

に対応する。さて, ここで次の等式が成り立つことに注目しよう。  $z$  をある複素数とする。

$$\begin{aligned} a(z-D)\gamma_5(z-D) \\ = z(2-az)\gamma_5 - (1-az)\{(z-D)\gamma_5 + \gamma_5(z-D)\} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

これは, Ginsparg-Wilson 関係式より簡単に示すことができる。この式の両辺に  $(z-D)^{-1}$  を右からかけて, trace をとると,

$$-a \text{Tr}(\gamma_5 D) = z(2-az) \text{Tr}(\gamma_5(z-D)^{-1}) \quad (\text{D.8})$$

となることがわかる。両辺を  $z(2-az)$  で割って,  $z=0$  まわりの小さな円周上で複素積分すると,

$$-\frac{a}{2} \text{Tr} \gamma_5 D = \oint \frac{dz}{2\pi i} \text{Tr}[\gamma_5(z-D)^{-1}] \quad (\text{D.9})$$

右辺は, 積分 loop の半径が充分小さいとき, 0-mode の projection になっていることがわかるので,

$$-\frac{a}{2} \text{Tr} \gamma_5 D = n_+ - n_- \quad (\text{D.10})$$

が得られる。これが格子理論における Atiyah-Singer の指数定理である。

## E シミュレーションに関する補足

### E.1 anti domain wall の寄与について

Domain wall fermion は, 3次元方向をとり入れたモデルである。この3次元方向が無限大の極限で, 厳密な chiral 対称性が得られる。しかし, シミュレーションでは3次元方向も有限なので, anti domain wall の寄与により, chiral 対称性は破れることになる。しかし, この寄与は, anti domain wall までの距離に対して指数関数的に減少することが知られている。今回のシミュレーションでは, meson の mass の収束性を調べることにより, anti domain wall の寄与がどれくらいで無視できるかを見積もった。quench 近似で Lüscher action を用いて, quark の mass を  $m=0.1$  のときの meson mass を測定した。anti domain wall までの距離は1から20まで変えた。結果は図 11 参照。距離が5あれば anti domain wall の寄与は充分なくなるとみて, シミュレーションは  $32 \times 32 \times 5$  の格子で行った。

## E.2 なぜ chiral limit の $\pi$ 粒子の質量は負になったのか

5.4 節の結果で見た通り, quark mass の  $2/3$  乗則に基づく chiral limit の結果は, 全て meson  $\pi$  の質量が負になるというものであった。わずかな量とはいえ, 誤差を考慮しても, 0 からはずれている。これはどうしてだろうか? 原因を考えてみると, 次のことが挙げられる。

- 有限体積効果: 格子を有限にとったことによる境界条件からの寄与。
- anti domain wall の寄与。
- くりこみの効果。

これらがどのように作用するのかは, まだ調査中なのではっきりしたことは言えないが, 次のような興味深い事実がある。それは Wilson loop の期待値に関する結果である。図 12 参照。(full QED Lüscher action で測定した。) これを見ると, quark mass  $m$  が小さくなるにつれて Wilson loop の値は少しずつ大きくなる傾向にある。これは string tension が小さくなることを意味する。

つまり, quark との相互作用によるくりこみの寄与が結合定数を弱くする方向へ働いている可能性がある。結合定数が弱くなると, meson の質量は軽くなるので, chiral limit が負になったのかもしれない。

いずれにしても, 上に挙げたような寄与に対する詳しい分析が必要である。

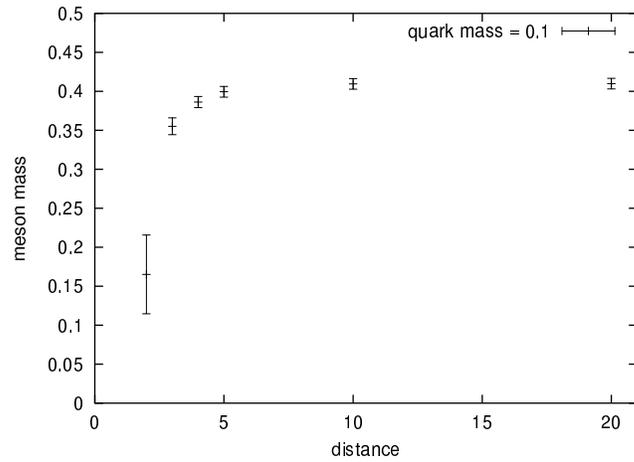


図 11: anti domain wall の寄与 : 距離が5あたりから収束している。

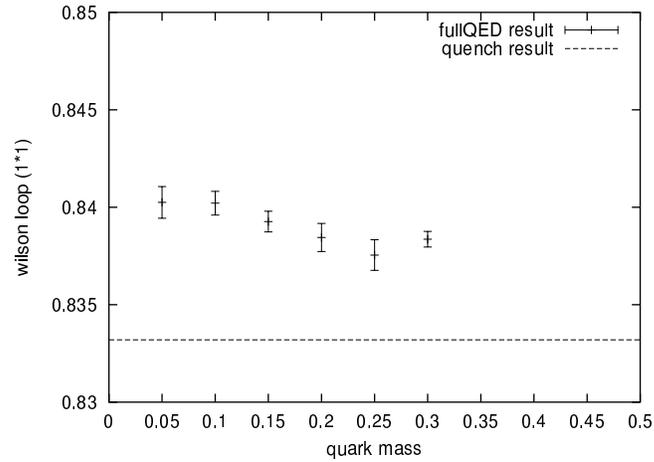


図 12: 一辺が1の Wilson loop の期待値。quark mass が軽くなると増加する傾向にある。波線は quench 近似のときの値。(quark mass が無限大の極限に相当する。)

## 参考文献

- [1] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Phys. Lett. B **105**, 219 (1981).
- [2] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. B **185**, 20 (1981) [Erratum-  
ibid. B **195**, 541 (1982)].
- [3] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. B **193**, 173 (1981).
- [4] P. H. Ginsparg and K. G. Wilson, Phys. Rev. D **25**, 2649 (1982)
- [5] M. Luscher, Phys. Lett. B **428**, 342 (1998)
- [6] D. B. Kaplan, Phys. Lett. B **288**, 342 (1992)
- [7] Y. Shamir, Nucl. Phys. B **406**, 90 (1993)
- [8] V. Furman and Y. Shamir, Nucl. Phys. B **439**, 54 (1995)
- [9] H. Neuberger, Phys. Lett. B **417**, 141 (1998)
- [10] H. Neuberger, Phys. Lett. B **427**, 353 (1998)
- [11] M. Luscher, Commun. Math. Phys. **85**, 39 (1982).
- [12] M. Luscher, “Abelian chiral gauge theories on the lattice with exact  
gauge invariance,” Nucl. Phys. B **549**, 295 (1999)
- [13] M. Luscher, “Weyl fermions on the lattice and the non-abelian gauge  
anomaly,” Nucl. Phys. B **568**, 162 (2000)
- [14] Y. Kikukawa and T. Noguchi, arXiv:hep-lat/9902022.
- [15] P. Hernandez, K. Jansen and M. Luscher, Nucl. Phys. B **552**, 363  
(1999)
- [16] M. Luscher, “Topology and the axial anomaly in abelian lattice gauge  
theories,” Nucl. Phys. B **538**, 515 (1999) [arXiv:hep-lat/9808021].
- [17] 藤川和男, “経路積分と対称性の量子的破れ,” 新物理学選書, 岩波書店  
(2001)
- [18] E. Witten, Phys. Lett. B **117**, 324 (1982).
- [19] E. Witten, Nucl. Phys. B **223**, 422 (1983).
- [20] O. Bar and I. Campos, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **83**, 594 (2000)
- [21] L. Alvarez-Gaume and P. Ginsparg, Nucl. Phys. B **243**, 449 (1984).

- [22] R. Stora, “Continuum Gauge Theories,” CPT-76/P.854 *Lectures given at Summer Inst. for Theoretical Physics, Cargese, France, Jul 12-31, 1976*
- [23] R. Stora, “Algebraic Structure And Topological Origin Of Anomalies,” LAPP-TH-94 *Seminar given at Cargese Summer Inst.: Progress in Gauge Field Theory, Cargese, France, Sep 1-15, 1983*
- [24] B. Zumino, “Chiral Anomalies And Differential Geometry: Lectures Given At Les Houches, August 1983,” UCB-PTH-83/16 *Lectures given at Les Houches Summer School on Theoretical Physics, Les Houches, France, Aug 8 - Sep 2, 1983*
- [25] M. Luscher, JHEP **0006**, 028 (2000) [arXiv:hep-lat/0006014].
- [26] H. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **101**, 1147 (1999)
- [27] 中原幹夫 (中原幹夫, 佐久間一浩 : 訳), “理論物理学のための 幾何学とトポロジー I” ピアソン・エデュケーション (2000)
- [28] 中原幹夫 (中原幹夫, 佐久間一浩 : 訳), “理論物理学のための 幾何学とトポロジー II” ピアソン・エデュケーション (2001)
- [29] Y. Kikukawa and Y. Nakayama, Nucl. Phys. B **597**, 519 (2001)
- [30] C. Adam, arXiv:hep-th/0212171.
- [31] S. R. Coleman, R. Jackiw and L. Susskind, Annals Phys. **93**, 267 (1975).
- [32] S. R. Coleman, Annals Phys. **101**, 239 (1976).
- [33] J. Frohlich and E. Seiler, Structure,” Helv. Phys. Acta **49**, 889 (1976).
- [34] J. S. Schwinger, Phys. Rev. **128**, 2425 (1962).
- [35] A. Jaster, “Simulating the massive Schwinger model with chiral defect fermions,” arXiv:hep-lat/9605011.