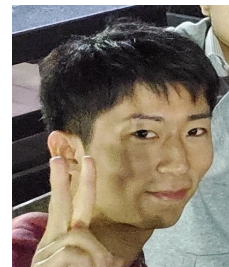
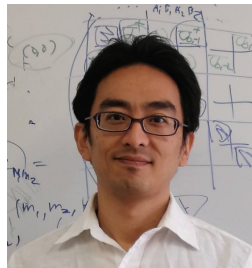


# Why monopole becomes dyon in topological insulator



深谷英則  
(大阪大学)

S. Aoki, HF, N. Kan, M. Koshino and Y. Matsuki (Osaka U.) arXiv:2304.13954



# 磁気単極子をトポロジカル絶縁体の中に入れると？

磁気単極子: 素粒子論的な研究対象。大統一理論、**duality**, ソリトン、インフレーション etc.

+

トポロジカル絶縁体 = **bulk**は絶縁体。表面に質量ゼロ (**gapless**)で伝導性の高いDirac場(準粒子)  
: 物性理論の研究対象

=

分野横断的研究

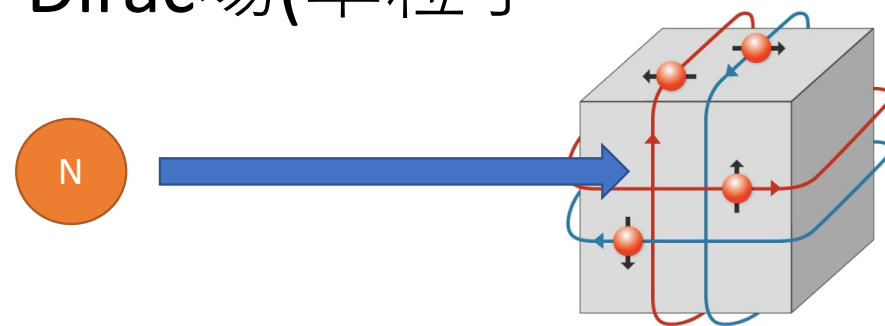


Figure from Wikipedia

# Witten effect

[Witten 1979]

磁気単極子をトポロジカル絶縁体の内部に入れると**1/2の電荷を持ってダイオンになるはず。**

[Cf. Recent works: Hidaka et al. 2020,2021, Fukuda-Yonekura 2021]

# 有効理論による記述

[Witten 1979]

$\theta$  term を加えると  $\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta}{32\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$

Maxwell equation が変更を受け  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{\theta}{8\pi^2} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}$   
磁荷にもれなく電荷がついて  
くることが示される。

$$q_e = \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\theta}{4\pi^2} \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{\theta q_m}{2\pi}$$

トポロジカル絶縁体は  $\Theta = \pi$

$\theta$  term は Time (T) reversal symmetry (or CP) を破る。  
ただし、以下の2点では T は protect される。

$\theta = 0$ : 自明な絶縁体

$\theta = \pi$ : トポロジカル絶縁体

$$q_e = \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\theta}{4\pi^2} \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{\theta q_m}{2\pi}$$

トポロジカル絶縁体の中で  
磁荷が  $q_m = 1$  の単極子は **-1/2電荷を持つはず。**

# 先行研究

有効理論はシンプルだが電荷の起源については何もわからない。->もちろん電子のはず。

磁気単極子(やvortex)に電子が束縛されるという先行研究は複数あるが、

[Yamagishi 1983, Zhao & Shen 2012, Khalilov 2012, Lee, Furusaki & Yang, 2019...]

1. 普通の絶縁体とトポロジカル絶縁体はどう違うのか？
2. どうして電子が束縛されるのか？
3. どうしてカイラルな境界条件を手で課す必要があるのか？
4. どうして電荷が $-1/2$ になるのか？

について全て答えているものは（私たちの知る限り）なかった。

# 私たちの研究

S. Aoki, HF, N. Kan, M. Koshino and Y. Matsuki (Osaka U.) work in progress

- 1) 磁場の強さ、範囲を有限にする。
- 2) PV 正則化のLO補正を取り入れる。

-> 質量の正負（普通の絶縁体／トポロジカル絶縁体）の明確な区別を持ち、すべての領域で有限なDirac方程式の解を調べる。

• 解析解、格子理論の数値解、両面から調べる。

-> 磁気単極子をトポロジカル絶縁体の中に置くと何が起こるのか、微視的機構を明らかにする。

# Contents

## ✓ 1. Introduction

本研究:磁気単極子の存在下における電子場のDirac方程式をUV finiteな形で解くことでWitten効果の微視的機構を明らかにする。

## 2. NaïveなDirac方程式の束縛解(review of Yamaishi 1983)

## 3. 正則化されたDirac方程式の解とWitten effectの根本的な原因

## 4. Atiyah-Singer の指数定理とCobordismによる半整数電荷の説明

## 5. 有効Maxwell理論の再解釈と実数磁荷

## 6. まとめ



## 磁気単極子のゲージ場

原点の磁気単極子が作るベクトルポテンシャル

$$A_1 = \frac{-q_m y}{r(r+z)}, \quad A_2 = \frac{q_m x}{r(r+z)}, \quad A_3 = 0,$$

$$\partial_i A_j - \partial_j A_i = q_m \epsilon_{ijk} \frac{x_k}{r^3} - 4\pi q_m \delta(x)\delta(y)\Theta(-z)\epsilon_{ij3}$$

Dirac string extending to  $z = -\infty$

Dirac の量子化条件  $\rightarrow q_m = n/2$

## 軌道角運動量

電磁場の影響で軌道角運動量が変更を受ける。

$$L_i = -i\epsilon_{ijk}x_j(\partial_k - iA_k) - n\frac{x_i}{2r},$$

## 交換関係

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k$$

## Dirac Hamiltonian (空間3次元)

$$H = \gamma_0 (\gamma^i (\partial_i - iA_i) + m) = \begin{pmatrix} m & \sigma^i (\partial_i - iA_i) \\ -\sigma^i (\partial_i - iA_i) & -m \end{pmatrix},$$

$$\gamma_0 = \sigma_3 \otimes 1 \quad \gamma_i = \sigma_1 \otimes \sigma_i$$

注)  $A_0 = 0, \quad \partial_t A_i = 0.$

“chirality” operator:  $\bar{\gamma} = -i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \sigma_1 \otimes 1 \quad (\neq \gamma_5)$

$$\{H, \bar{\gamma}\} = 0.$$

## 全角運動量

$$J_i = L_i 1 \otimes 1 + \frac{1}{2} 1 \otimes \sigma_i, \quad [J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$$

$$[J_i, H] = 0$$

“球面”演算子 [物理的意味は後述]

$$D^{S^2} = \left[ \sigma^i \left( L_i + \frac{n}{2} \frac{x_i}{r} \right) + 1 \right]$$

$[H, \sigma_3 \otimes D^{S^2}] = 0$  角度方向は  $J^2, J_3, D^{S^2}$  の固有状態で完全系をはれる。

便利な公式

$$\sigma_r = \frac{\sigma^j x_j}{r} \quad \left\{ D^{S^2}, \sigma_r \right\} = 0,$$

$$[D^{S^2}]^2 = \left( j + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{n^2}{4},$$

$$\sigma^i (\partial_i - iA_i) = \sigma_r \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \left( D^{S^2} - 1 \right) \right)$$

$$D^{S^2} \chi_{j,j_3,\pm}(\theta, \phi) = \pm \sqrt{\left( j + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{n^2}{4}} \chi_{j,j_3,\pm}(\theta, \phi) \quad \text{for } j > \left| \frac{n}{2} \right| - 1/2$$

$$D^{S^2} \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi) = 0 \quad \text{for } j = \left| \frac{n}{2} \right| - 1/2 \quad \sigma_r \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi) = \text{sign}(n) \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi)$$

## 動径方向

$$\psi_{j,j_3,\pm}^E(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} f(r)\chi_{j,j_3,\pm}(\theta, \phi) \\ g(r)\sigma_r\chi_{j,j_3,\pm}(\theta, \phi) \end{pmatrix}$$

for  $j > |\frac{n}{2}| - 1/2$

$$\psi_{j,j_3,0}^E(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} f(r)\chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi) \\ g(r)\chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi) \end{pmatrix}$$

for  $j = |\frac{n}{2}| - 1/2$

それぞれ  $f(r)$ ,  $g(r)$  について解けばよい。

## 動径方向

$$\psi_{j,j_3,\pm}^E(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} f(r)\chi_{j,j_3,\pm}(\theta, \phi) \\ g(r)\sigma_r\chi_{j,j_3,\pm}(\theta, \phi) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Monopoleに局在する} \\ \text{解なし。} \end{array}$$

$$\text{for } j > \left| \frac{n}{2} \right| - 1/2$$

$$\psi_{j,j_3,0}^E(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} f(r)\chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi) \\ g(r)\chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi) \end{pmatrix}$$

$$\text{for } j = \left| \frac{n}{2} \right| - 1/2$$

それぞれ  $f(r)$ ,  $g(r)$  について解けばよい。

Monopoleに局在するゼロモード解

$$\begin{pmatrix} m & \text{sign}(n)\partial_r \\ -\text{sign}(n)\partial_r & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(r) \\ g(r) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} f(r) \\ g(r) \end{pmatrix}.$$

解は  $E=0$  となる

$$\psi_{j,j_3,0}^{E=0} = \frac{C_{j,j_3,0}}{r} \exp(-|m|r) \begin{pmatrix} 1 \\ \text{sign}(m)\text{sign}(n) \end{pmatrix} \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi),$$

Monopoleに束縛された $E=0$ のelectron stateがdyonになる原因?  
原点で発散しているけど大丈夫?



## まだわからない点

$$\psi_{j,j_3,0}^{E=0} = \frac{C_{j,j_3,0}}{r} \exp(-|m|r) \begin{pmatrix} 1 \\ \text{sign}(m)\text{sign}(n) \end{pmatrix} \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi),$$

1. 解は  $\sigma_1 \otimes \sigma_r = \text{sign}(m)$  の“カイラル”な固有状態。でもその起源は???
2.  $m$  の符号に差がない。 $r=0$  におけるカイラリティを「境界条件」として手で与える必要がある。なぜ境界条件が必要なのか？背後の物理は何か？
3. 電荷 $1/2$ をどう説明するのか？ Yamagishi 1983では Dirac seaを全部足して正則化した結果  $1/2$  を導出。でも電荷保存を破る regularization. そもそも本当にUVの効果なの？

# Contents

## ✓ 1. Introduction

本研究:磁気単極子の存在下における電子場のDirac方程式をUV finiteな形で解くことでWitten効果の微視的機構を明らかにする。

## ✓ 2. NaïveなDirac方程式の束縛解(review of Yamaishi 1983)

磁気単極子に局在するゼロモードが存在。その物理的意味とWitten効果との関係が明らかではない。

## 3. 正則化されたDirac方程式の解とWitten effectの根本的な原因

## 4. Atiyah-Singer の指数定理とCobordismによる半整数電荷の説明

## 5. 有効Maxwell理論の再解釈と実数磁荷

## 6. まとめ

# 格子理論における Wilson Dirac fermion 方程式

$$H_W \psi = \gamma^0 \left( \sum_{i=1}^3 \left[ \gamma^i \frac{\nabla_i^f + \nabla_i^b}{2} - \frac{1}{2} \nabla_i^f \nabla_i^b \right] + m \right) \psi = E \psi \quad \begin{array}{l} \gamma_0 = \sigma_3 \otimes 1 \\ \gamma_i = \sigma_1 \otimes \sigma_i \end{array}$$

where  $\nabla_i^f \psi(\mathbf{x}) = U_i(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i) - \psi(\mathbf{x})$

$$\nabla_i^b \psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) - U_i^\dagger(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i) \psi(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i)$$

$$U_j(\mathbf{x}) = \exp \left[ i \int_0^1 A_j(\mathbf{x}') dl \right],$$

\* IR の処理は後述。

Pauli-Villars 補正を取り込んだDirac 方程式

**Wilson項をもつ Dirac 方程式を考える。**

$$\gamma_0 \left[ \gamma^i D_i + m + \frac{1}{M_{\text{PV}}} D_i^\dagger D^i \right] \psi = E \psi, \quad \begin{aligned} \gamma_0 &= \sigma_3 \otimes 1 \\ \gamma_i &= \sigma_1 \otimes \sigma_i \end{aligned}$$

\* PV正則化された分配関数に自然に含まれる。

$$Z = \det \left[ \frac{D + m}{D + M_{\text{PV}}} \right] = \det(1/M_{\text{PV}}) \left[ D + m + \frac{1}{M_{\text{PV}}} D_\mu^\dagger D^\mu + O(1/M_{\text{PV}}^2, m/M_{\text{PV}}, F_{\mu\nu}/M_{\text{PV}}) \right]$$

## 質量(gap)の正負

Wilson項( $M_{\text{PV}} > 0$  に固定)に対して正か負か well-defined.

$$\gamma_0 \left[ \gamma^i D_i + m + \frac{1}{M_{\text{PV}}} D_i^\dagger D^i \right] \psi = E\psi, \quad \gamma^0 \left( \sum_{i=1}^3 \left[ \gamma^i \frac{\nabla_i^f + \nabla_i^b}{2} - \frac{1}{2} \nabla_i^f \nabla_i^b \right] + m \right) \psi = E\psi$$

Anomaly との関連 : axial U(1)変換で質量の符号をそろえると

$$\det \left[ \frac{D + m}{D + M_{\text{PV}}} \right] = \det \left[ \frac{D + |m|}{D + M_{\text{PV}}} \right] \exp \left( \theta \int d^4x F \tilde{F} \right)$$

$m > 0 \rightarrow \theta = 0$  : normal phase

$m < 0 \rightarrow \theta = \pi$  : topological phase

連続極限で本当に効くの？

Fermion場のcut-off:  $1/M_{\text{PV}} \sim a \sim 10^{-10} m$ .

('tHooft-Polyakov) monopoleのサイズ:  $r_1 \sim 10^{-30} m$ .

Monopoleのサイズよりも20桁大きいところで何が起こるか調べることは重要。

# Wilson項による**加法的**質量補正

$$\gamma_0 \left[ \gamma^i D_i + m + \frac{1}{M_{\text{PV}}} D_i^\dagger D^i \right] \psi = E\psi.$$

補正項は**常に正**。 Cf.) lattice QCD の bare mass は負にとる  
磁場が  $r < r_1$  に集中している場合、

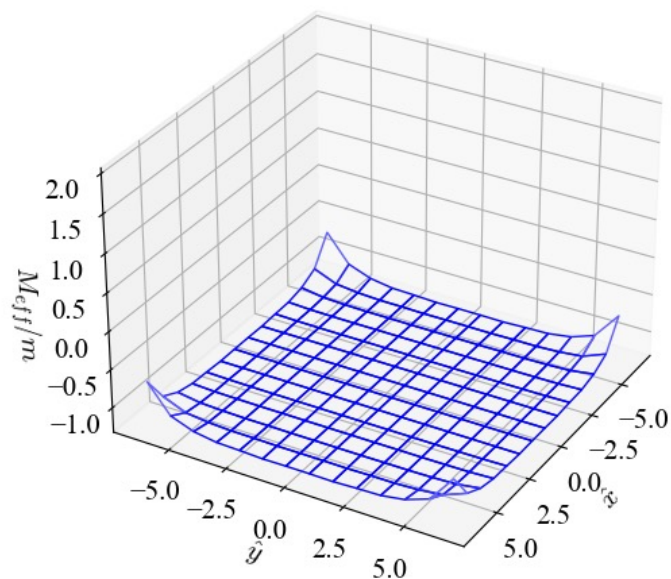
$$\text{質量補正は} \quad \sim \frac{1}{M_{\text{PV}} r_1^2} \quad \begin{array}{l} 1/M_{\text{PV}} \sim a \sim 10^{-10} m. \\ r_1 \sim 10^{-30} m. \end{array}$$

磁気単極子の十分近傍では質量が正になり、  
**球状の domain-wall が生成される！**

(正の質量 (普通の絶縁体) では生成されない)

# Wilson項による加法的質量補正

格子理論による  $\left\langle m + \frac{1}{M_{PV}} D_i^\dagger D^i \right\rangle$  の数値評価



z=0の断面における  
localな質量/ $|m|$ の期待値

- Bra-ketはエネルギーの最低固有状態についてとる:

$$\frac{\phi_0(\mathbf{x})^\dagger \left[ -\sum_{i=1,2,3} \frac{1}{2} \nabla_i^f \nabla_i^b + m \right] \phi_0(\mathbf{x})}{\phi_0(\mathbf{x})^\dagger \phi_0(\mathbf{x})}$$

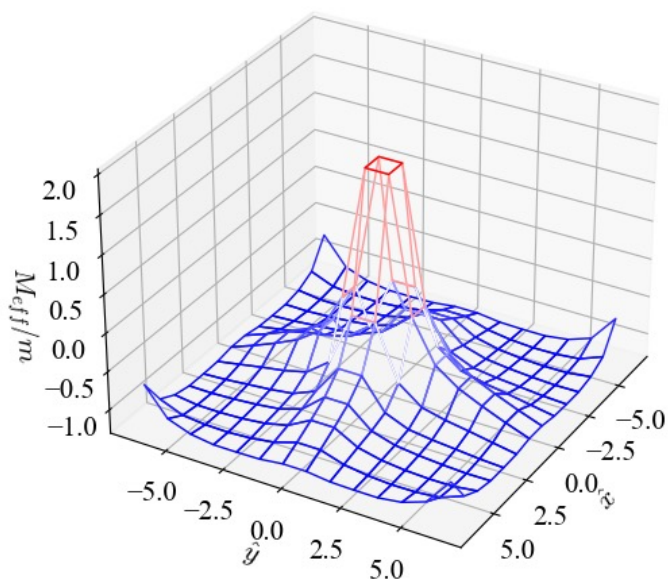
格子理論数値計算の詳細は後述。

m=-0.43, n=0:磁気単極子がない場合はいたるところ負。



# Wilson項による加法的質量補正

格子理論による  $\left\langle m + \frac{1}{M_{PV}} D_i^\dagger D^i \right\rangle$  の数値評価



磁気単極子を置くと、そのまわりに質量正の領域ができる。

= domain-wallが生成される！

z=0の断面におけるlocalな質量/|m|の期待値

磁気単極子が作ったdomain-wall と端状態

$r=r_1$  の位置のDomain-wall に局在する解は

$$[\sigma_1 \otimes \sigma_r \partial_r + m_{\text{eff}}(r)] \psi = 0, \quad \text{を満たす。}$$

$$\psi \sim \exp \left[ -s \int_{r_1}^r dr' m_{\text{eff}}(r') \right] \quad s : \text{eigenvalue of } \sigma_1 \otimes \sigma_r$$

$s=-1$ 、かつ  $m_{\text{eff}}(r \gg r_1) \rightarrow m < 0$ ,  $m_{\text{eff}}(r < r_1) > 0$

のときのみ、 $r_1$ の局在する端状態が存在。

## Yamagishi 1983 の解

$$\psi_{j,j_3,0}^{E=0} = \frac{C_{j,j_3,0}}{r} \exp(-|m|r) \begin{pmatrix} 1 \\ \text{sign}(m)\text{sign}(n) \end{pmatrix} \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi),$$

$$\sigma_r \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi) = \text{sign}(n) \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi)$$

$m < 0$  のとき、 $\sigma_1 \otimes \sigma_r = -1$  の固有状態になっている。

$m > 0$  では逆の **chirality** のため、端状態は存在できないと考えれば良い。

# Wilson 項も含めた厳密解

$$\gamma_0 \left[ \gamma^i D_i + m + \frac{1}{M_{\text{PV}}} D_i^\dagger D^i \right] \psi = E \psi,$$

はがんばると解ける。[論文に詳細]

$r_1 \rightarrow 0$  における **E=0 モード** の厳密解の結果

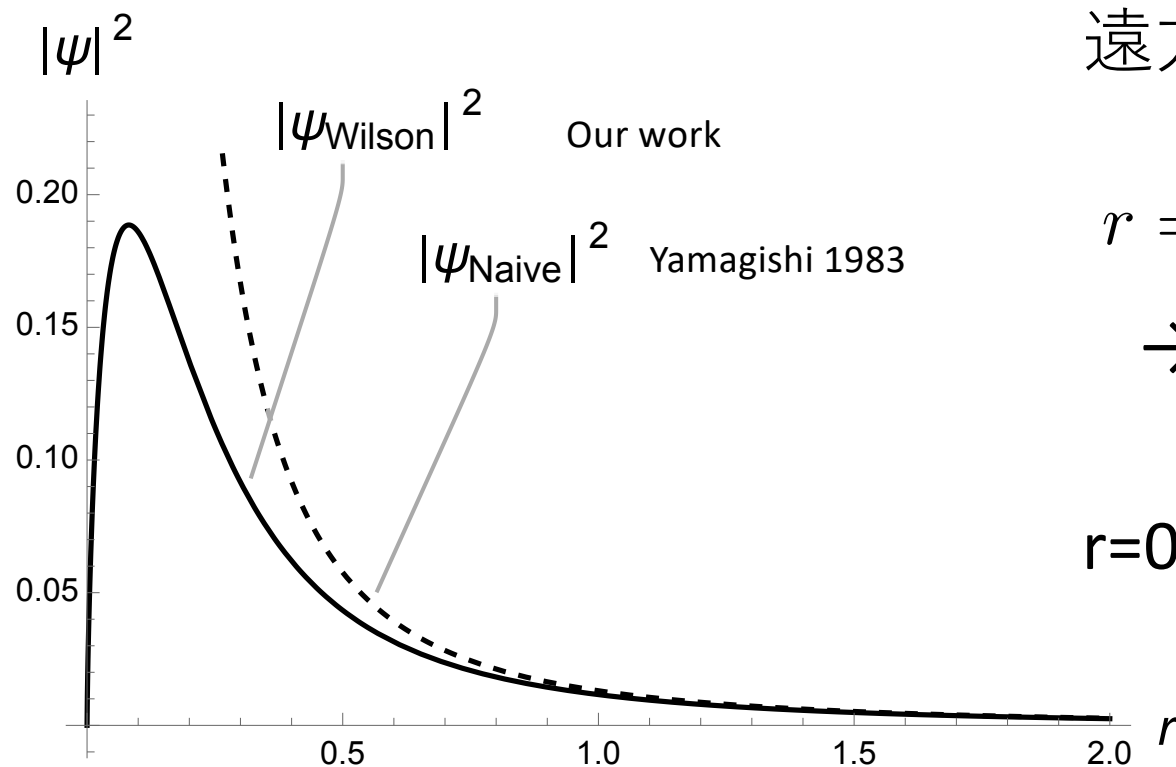
$$\psi_{j,j_3}^{\text{mono}} = \frac{B e^{-\frac{M_{\text{PV}} r}{2}}}{\sqrt{r}} I_\nu(\kappa r) \begin{pmatrix} 1 \\ -s \end{pmatrix} \otimes \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi)$$

$$s = \text{sign}(n)$$

$$\nu = (\sqrt{2|n| + 1})/2$$

$$\kappa = \frac{M_{\text{PV}}}{2} \sqrt{1 + 4m/M_{\text{PV}}}$$

# Wilson 項も含めた厳密解



Plot with  $n = 1$ ,  $m = 0.1$ ,  $M_{\text{PV}} = 10$ .

遠方では Yamagishi 1983 と一致。

$$r = \frac{|n|}{2M_{\text{PV}}} \quad \text{にピーク。}$$

→ domain-wall の半径

$$\sim 1/M_{\text{PV}}$$

$r=0$  ではゼロ。

(Wilson 項の補正  $\rightarrow \infty$ )

# Wilson 項は本質か？

Q. Wilson fermion ではなく、overlap fermion でやれば加法的質量補正は存在しないのでは？

$$D_{ov} = \frac{1}{a} \left( 1 + \gamma_5 \frac{H_W}{\sqrt{H_W^2}} \right)$$

A. 格子にdefectがあるとそうでもない。

例: Dirichlet boundary condition を課す Schrodinger functional では Naïve なoverlap fermion は locality を壊す。

-> Ginsparg-Wilson を破る必要がある。[Luescher 2006]

Monopoleまわりのplaquetteは admissibility conditionを破るので localityが危なそう。-> Ginsparg-Wilson を破る必要=additivemass shiftがあるのではないか？

\* 少なくとも物質中の電子場をカイラル対称なDirac演算子で記述する必要はない。

# Contents

## ✓ 1. Introduction

本研究:磁気単極子の存在下における電子場のDirac方程式をUV finiteな形で解くことでWitten効果の微視的機構を明らかにする。

## ✓ 2. NaïveなDirac方程式の束縛解(review of Yamaishi 1983)

磁気単極子に局在するゼロモードが存在。その物理的意味とWitten効果との関係が明らかではない。

## ✓ 3. 正則化されたDirac方程式の解とWitten effectの根本的な原因

強い磁場が原子間隔くらいの有限領域にdomain-wall fermion系を作る。その端状態のゼロモードが電荷の起源。Yamagishiらカイラルな境界条件も動的に説明。

## 4. Atiyah-Singer の指数定理とCobordismによる半整数電荷の説明

## 5. 有効Maxwell理論の再解釈と実数磁荷

## 6. まとめ

# 球面演算子

私たちの解  $\psi_{j,j_3}^{\text{mono}} = \frac{B e^{-\frac{M_{\text{PV}} r}{2}}}{\sqrt{r}} I_\nu(\kappa r) \begin{pmatrix} 1 \\ -s \end{pmatrix} \otimes \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi)$

は  $D^{S^2} = \left[ \sigma^i \left( L_i + \frac{n}{2} \frac{x_i}{r} \right) + 1 \right]$  のゼロ固有値解でもあった。

$$D^{S^2} \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi) = 0 \quad \text{for } j = \left| \frac{n}{2} \right| - 1/2$$

実はmonopoleまわりの球状domain-wall上のDirac演算子！



# 球面演算子

$R(\theta, \phi) = \exp(i\theta\sigma_2/2) \exp(i\phi(\sigma_3 + 1)/2)$  でLocal Lorentz変換してみると、

$$\frac{1}{r_2} D^{S^2'} := \frac{1}{r_2} R(\theta, \phi) \left[ \sigma^i \left( L_i + \frac{n}{2} \frac{x_i}{r} \right) + 1 \right] R(\theta, \phi)^{-1} \quad r_2: \text{domain-wall radius.}$$

$$= -\frac{1}{r_2} \sigma_3 \left[ \sigma_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma_2 \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + i\hat{A}_\phi + i\hat{A}_\phi^s \right) \right],$$

$$\hat{A}_\phi = \frac{n}{2} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$\hat{A}_\phi^s = \frac{1}{2 \sin \theta} - \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} \sigma_3$$

MonopoleのU(1) ゲージ場

domain-wallが強く曲がることによって生じた重力場  
(Spin<sup>c</sup> connection)

\* 等価原理 : domain-wallへの拘束力による加速 = 重力

[Aoki-Fukaya 2022 Mar, 2022 Dec]

# 重力 vs. 磁場

$$\frac{1}{r_2} D^{S^2} = -\frac{1}{r_2} \sigma_3 \left[ \sigma_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma_2 \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + i \hat{A}_\phi + i \hat{A}_\phi^s \right) \right], \quad r_2: \text{domain-wall radius.}$$

Aoki Fukaya 2022 Mar, 2022Dec : 電磁場のない重力だけのとき、Dirac 演算子の spectrum は gapped:  $E_1 \sim 1/r_2$ .

$$D^{S^2} \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi) = 0 \quad \text{for } j = \left| \frac{n}{2} \right| - 1/2$$

Monopole の磁場はちょうど重力の効果を打ち消してゼロ固有値を実現。しかも  $\sigma_r = \sigma^j x_j / r$  と  $D^{S^2}$  は反可換: ゼロモードは2次元のカイラル固有状態。

# Atiyah-Singer 指数定理 on $S^2$ domain-wall

$$D^{S^2} \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi) = 0 \quad \text{for } j = \left| \frac{n}{2} \right| - 1/2$$

縮退は  $2j+1 = |n|$ 。

2-dim カイラリティは  $\sigma_r \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi) = \text{sign}(n) \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi)$

$$\rightarrow \text{Ind} D^{S^2} = n.$$

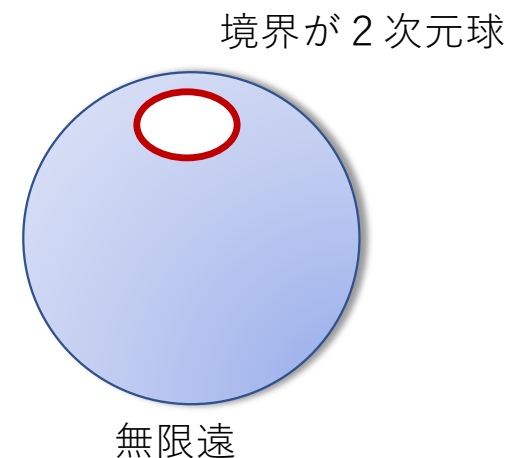
一方 topological index は  $\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} d^2x \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} d^2x \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = n.$

つまり、monopole まわりの domain-wall 上の zeromodes は

Atiyah-Singer 指数定理によりトポロジカルに守られている。

赤外正則化: トポロジカル絶縁体の  
無限遠をどうするか?

素粒子論でよくやるIR正則化  
= 無限遠を一点コンパクト化。



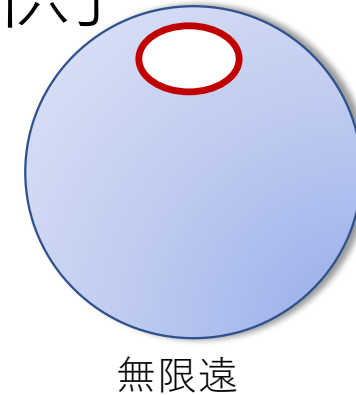
今回はできない! Atiyah-Singer 指数はcobordism 不変量 = 何  
かの境界上ではゼロにならない量。

$$\int_{\partial M} F = \int_M dF = 0.$$

# トポロジカル絶縁体の外側

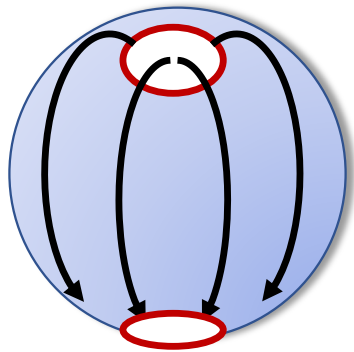
境界が2次元

磁力線が無限遠で吸い込まれることを考えるとそこに負の磁気モノポールを置くことに対応。



= 無限遠にdomain-wallが生じる

= トポロジカル絶縁体の外には必ず普通の絶縁体（実験室）がなければならない。



$$0 = \int_M dF = \int_{\partial M_1} F + \int_{\partial M_2} F$$

こちら側にもdomain-wallが必要。しかもIndexは共通。

しかも2つのdomain-wallは同じindexを共有。

# 外側のdomain-wall上の端状態

$$\gamma_0 \left[ \gamma^i D_i + m_0 \epsilon(r - r_0) + \frac{1}{M_{\text{PV}}} D_i^\dagger D^i \right] \psi = E \psi, \\ \epsilon(r - r_0) = \pm 1 \text{ for } r \gtrless r_0$$

はがんばると解ける。[  $r_0 m_0$  の大きい極限におけるedge解]

$$\psi_{j,j_3}^{\text{DW}} = \begin{cases} \frac{\exp\left(\frac{M_{\text{PV}} r}{2}\right)}{\sqrt{r}} (e^{\kappa_- r_0} B' K_\nu(\kappa_- r) + e^{-\kappa_- r_0} C' I_\nu(\kappa_- r)) \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} \otimes \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi), & (r < r_0), \\ \frac{D' \exp\left(\kappa_+ r_0 + \frac{M_{\text{PV}} r}{2}\right)}{\sqrt{r}} K_\nu(\kappa_+ r) \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} \otimes \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi), & (r > r_0), \end{cases}$$

$$\kappa_\pm = \frac{M_{\text{PV}}}{2} \sqrt{1 \pm 4|m|/M_{\text{PV}}}$$

$$\frac{C'}{B'} = \pi \frac{\kappa_- - \kappa_+}{\kappa_- + \kappa_+},$$

$$\frac{D'}{B'} = \frac{2\sqrt{\kappa_- \kappa_+}}{\kappa_- + \kappa_+}$$

- 1)  $E = 0$ .
- 2)  $\sigma_1 \otimes \sigma_r = +1$  (monopole まわりと逆)
- 3) 縮退は  $2j+1 = |n|$ .
- 4)  $\bar{\gamma} = \sigma_1 \otimes 1 = s = \text{sign}(n)$  の固有状態でもある。

# 2つのDW上ゼロモードのmixing

本当の固有状態は2つのdomain-wall上のゼロモードペアが混ざったもの。

$$\psi = \alpha \psi_{j,j_3}^{\text{mono}} + \beta \psi_{j,j_3}^{\text{DW}}$$

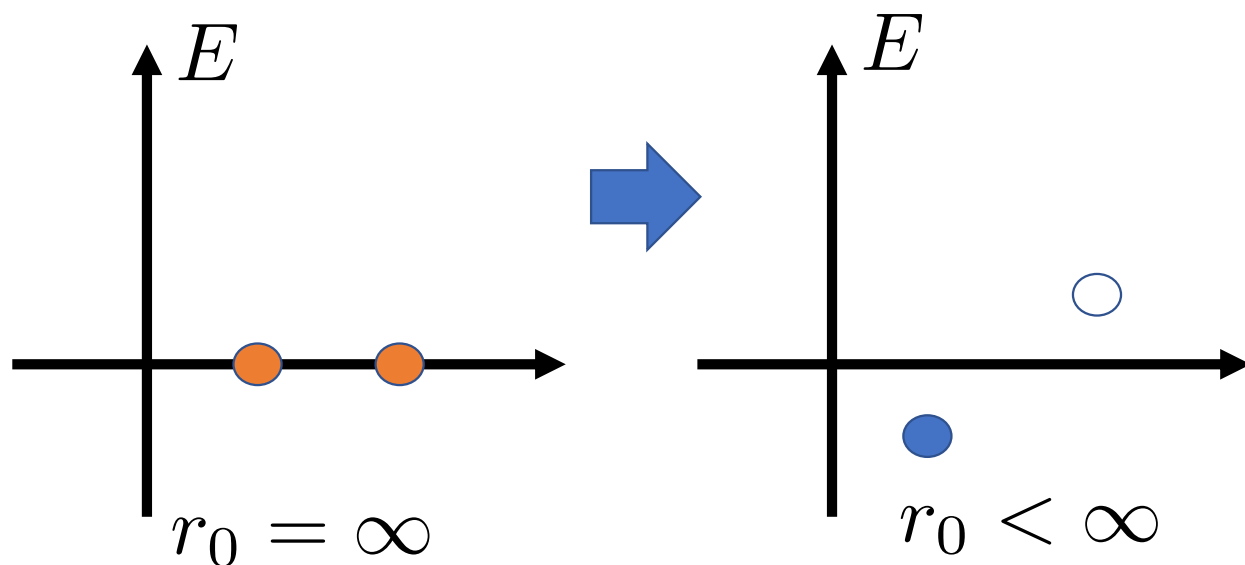
$$(\psi_{j,j_3}^{\text{mono}})^\dagger H \psi_{j,j_3}^{\text{mono}} = (\psi_{j,j_3}^{\text{DW}})^\dagger H \psi_{j,j_3}^{\text{DW}} = 0 \quad \leftarrow \{ \bar{\gamma}, H \} = 0$$

$$(\psi_{j,j_3}^{\text{mono}})^\dagger H \psi_{j,j_3}^{\text{DW}} = (\psi_{j,j_3}^{\text{DW}})^\dagger H \psi_{j,j_3}^{\text{mono}} =: \Delta \sim \exp(-|m|r_0)$$

$$\rightarrow E = \pm \Delta \quad \alpha = \pm \beta$$

どんなに  $\Delta$  が小さくても mixing は **50% vs. 50%**

# なぜ電荷は-1/2?



Half filling (Fermi energy = 0) では下の状態のみ電子が占有。

そのうちの1/2の振幅が monopole まわりに存在。

ゼロ固有値が縮退

$E = \pm \Delta$  に split.

$$\psi_{\mp \Delta} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{j,j_3}^{\text{mono}} \pm \psi_{j,j_3}^{\text{DW}}]$$

**Monopole** まわりの電荷(の期待値)は **-1/2!**



# 格子理論数值計算

$L=24,32, 48$  lattices

Domain-wall radius  $r_0=(3/8)L$

Monopole put at  $(L/2,L/2,L/2)$

Anti-monopole at  $(L/2,L/2,1/2)$

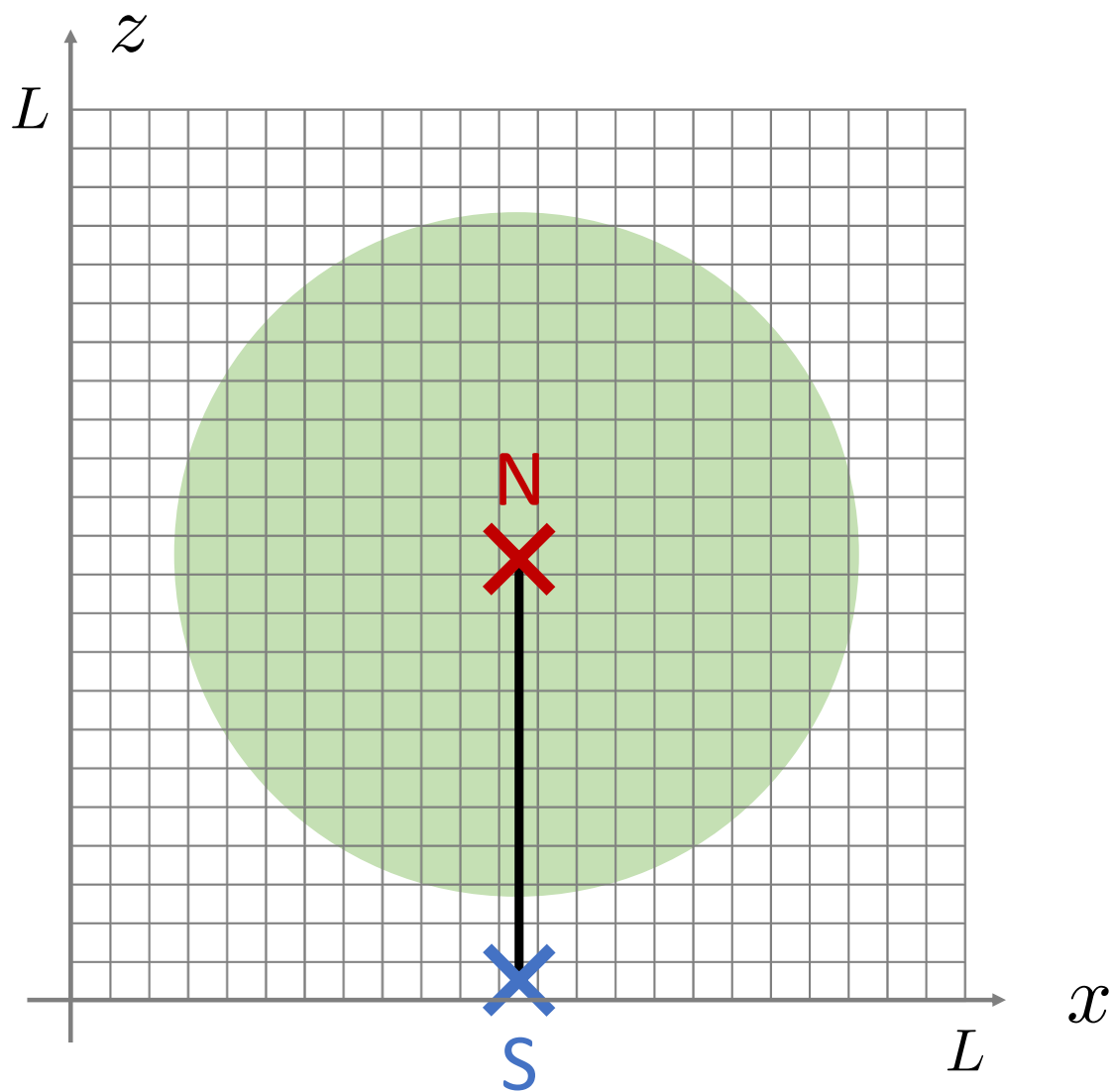
$m(r<r_0) = -14/(L+1)$

$m(r>r_0) = +14/(L+1)$

Open boundary condition at

$x_i = 0$  or  $L$  ( $m=\infty$  outside)

Monopole charge  $n=0,1,-2$



# Near-zero 固有値 & 固有関数

Circle: lattice results

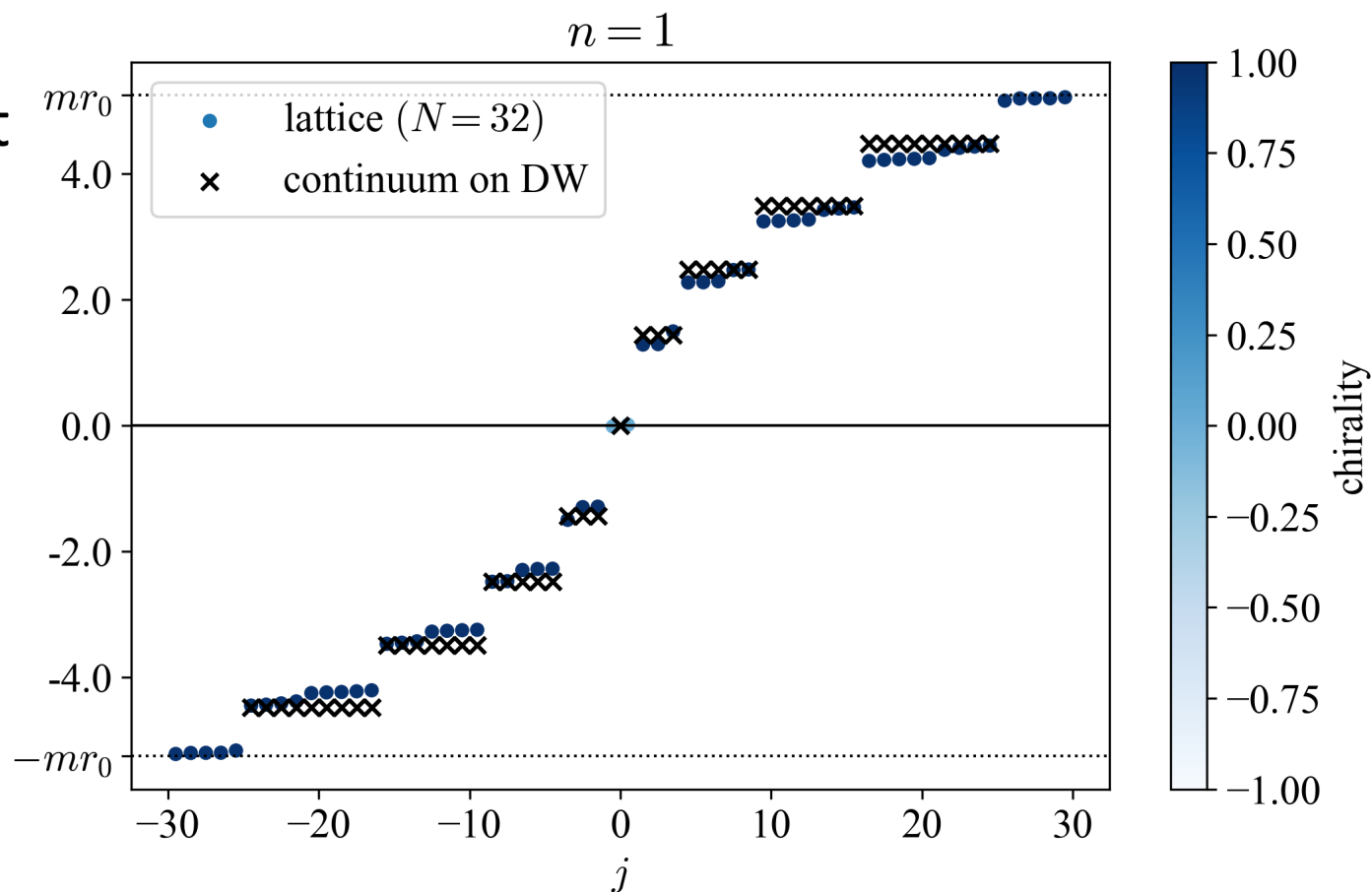
Crosses: analytic result  
on DW

Gradation: chirality.

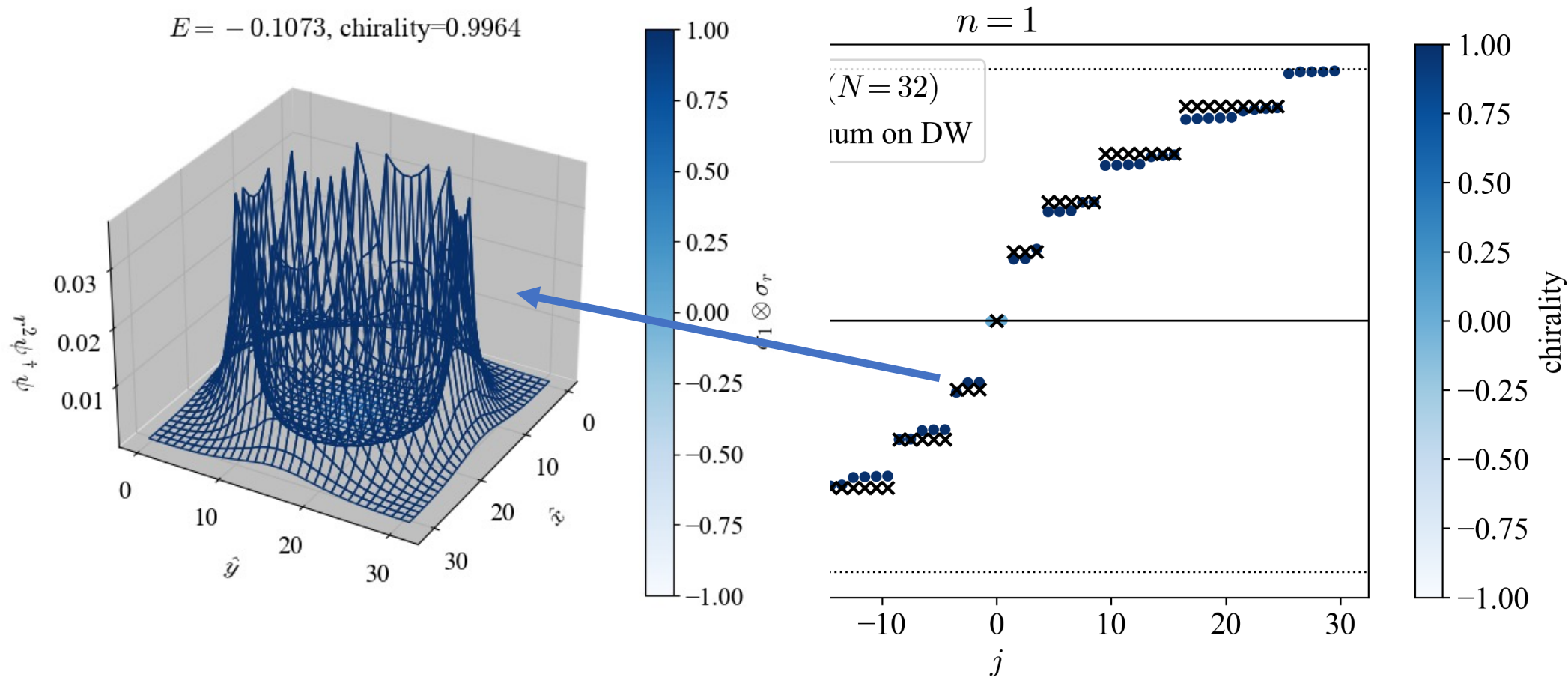
$$\langle \sigma_1 \otimes \sigma_r \rangle_k \quad E r_0$$

Monopole charge  $n=1$ .

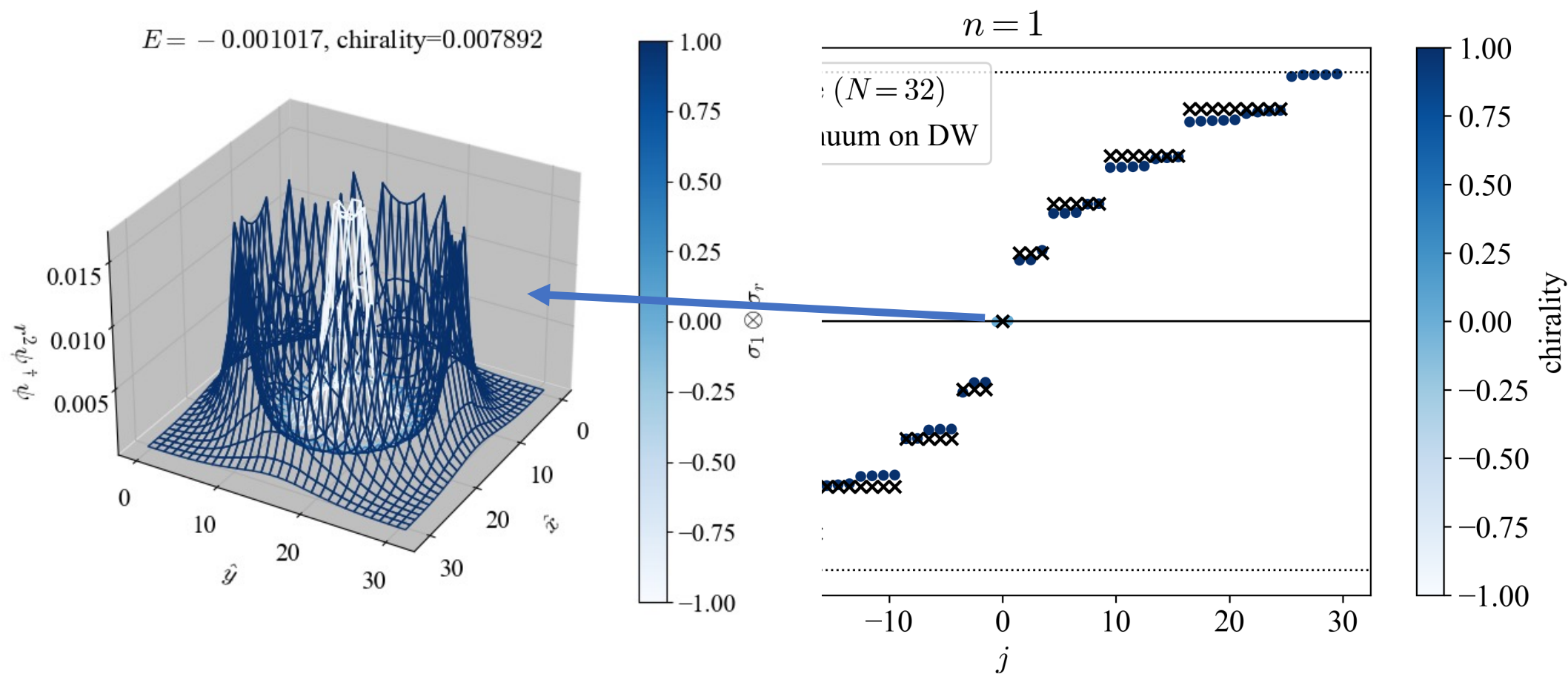
We have two near  
Zero modes.



# Near-zero 固有値 & 固有関数



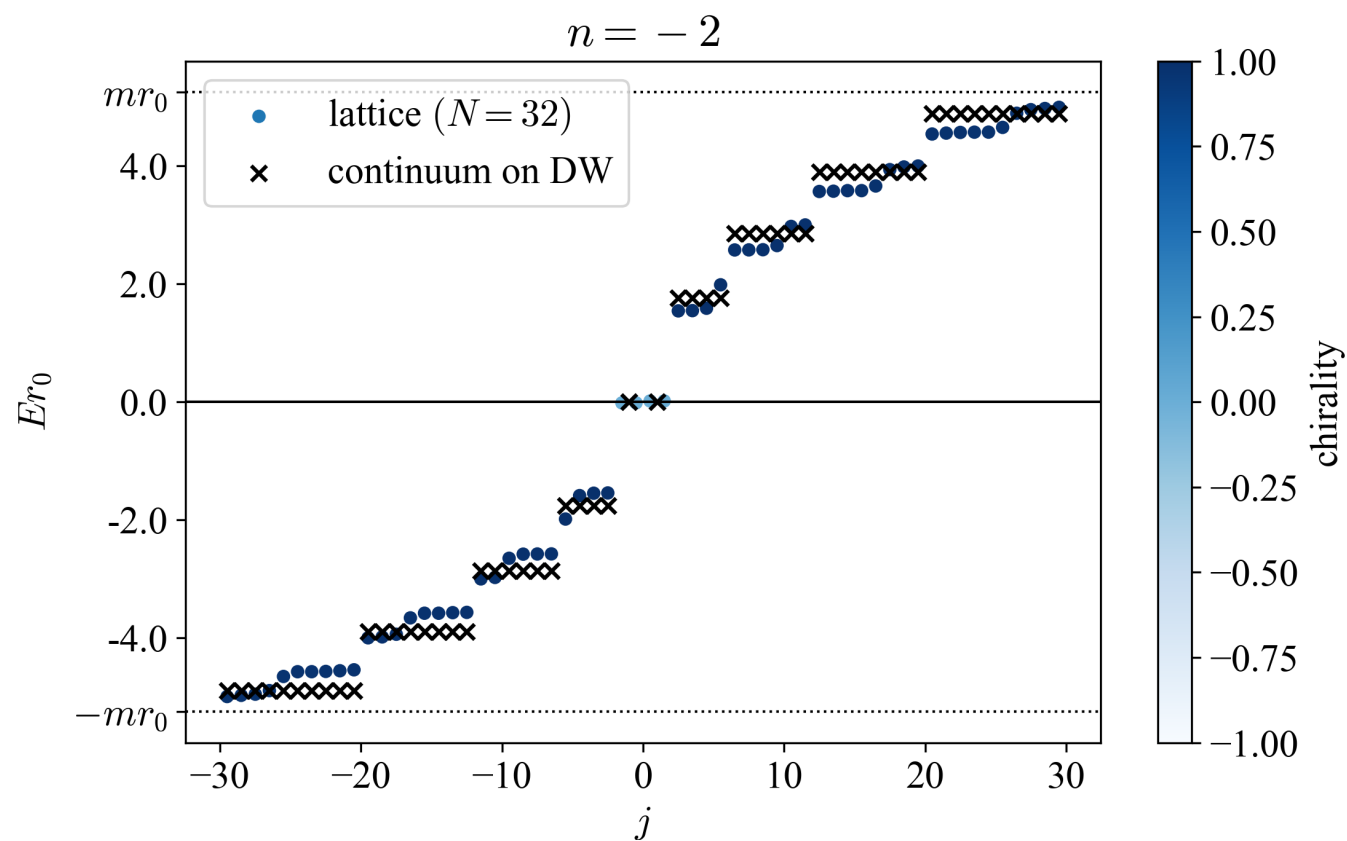
# Near-zero 固有値 & 固有関数



# Near-zero 固有値 & 固有関数

$n=-2$

We have 4 near-zero modes.

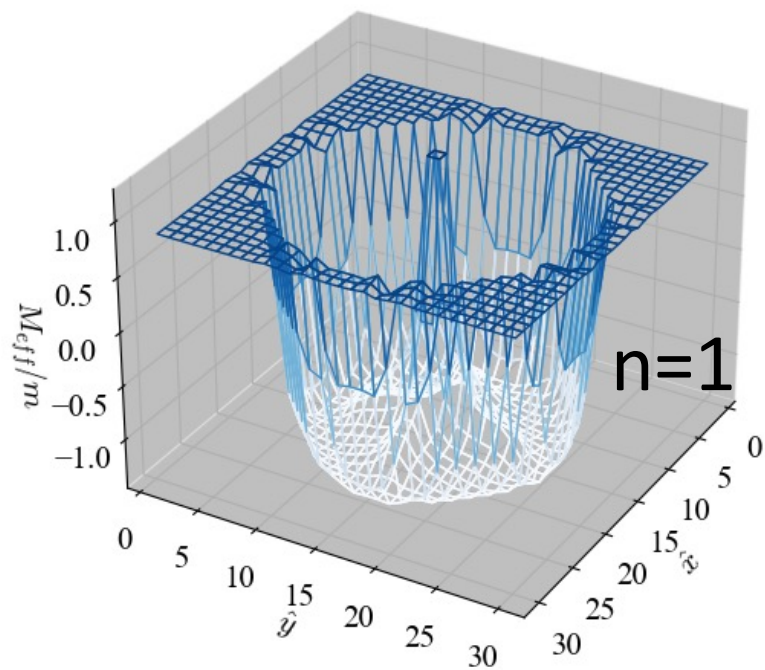


# 有効質量

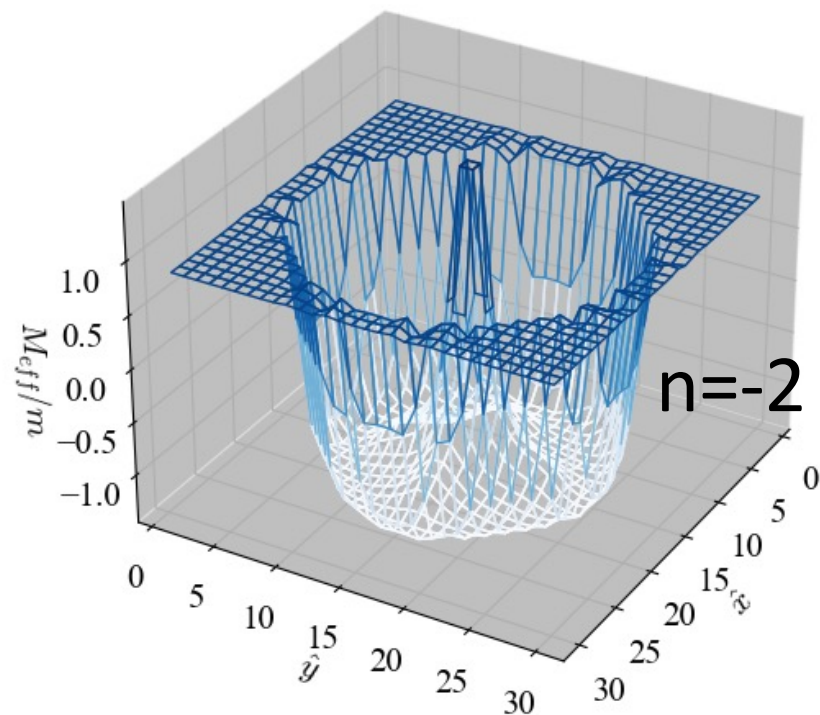
at  $z=(L+1)/2$  slice

$$\frac{\phi_0(\mathbf{x})^\dagger \left[ -\sum_{i=1,2,3} \frac{1}{2} \nabla_i^f \nabla_i^b + m \right] \phi_0(\mathbf{x})}{\phi_0(\mathbf{x})^\dagger \phi_0(\mathbf{x})}$$

$E = -0.001017$ ,  $\text{chirality} = 0.007892$



$E = -0.001339$ ,  $\text{chirality} = 0.004913$

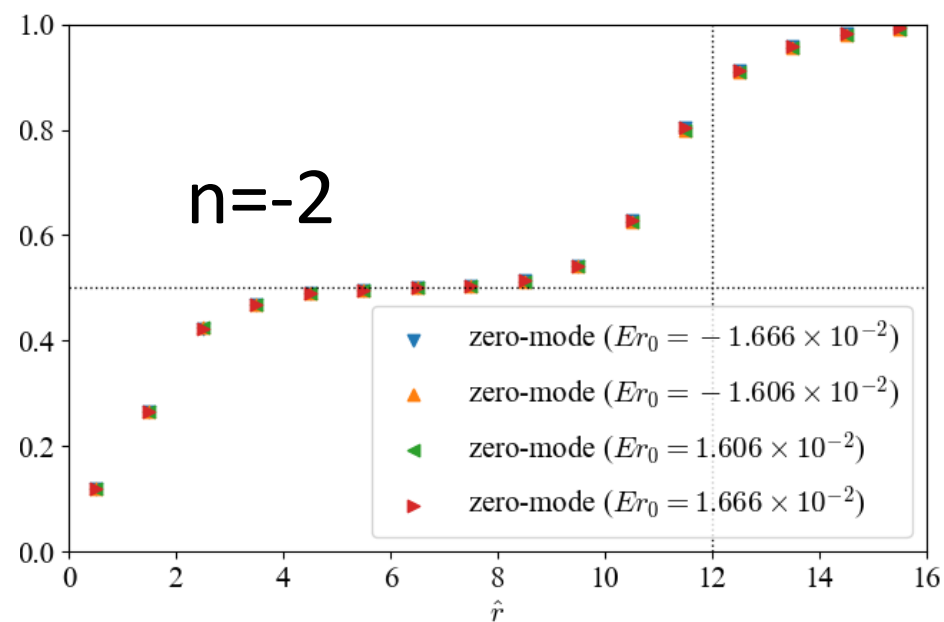
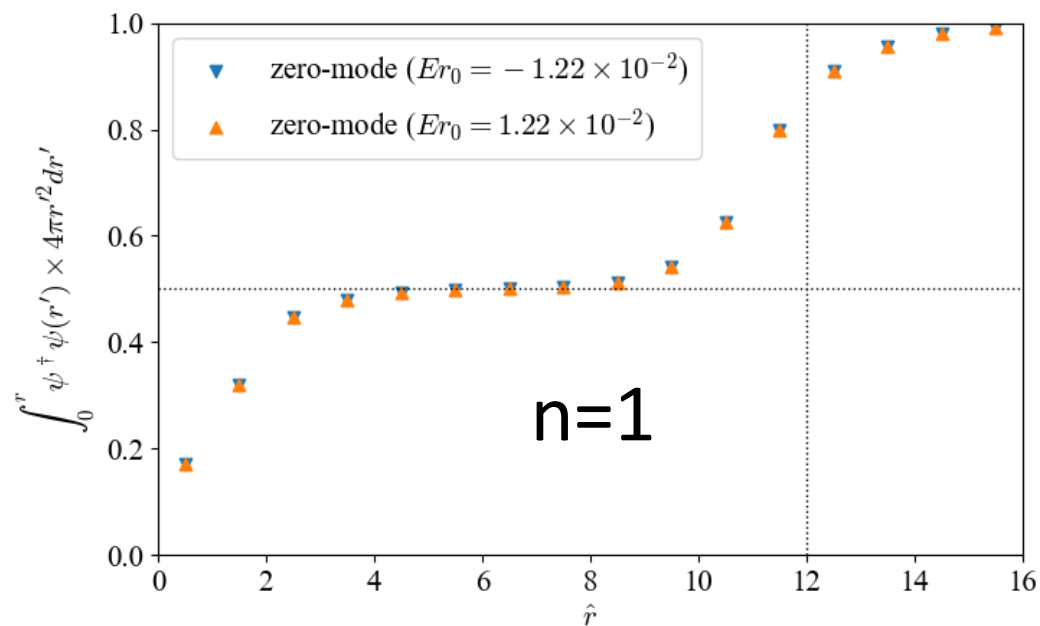


# 磁気単極子まわりの電荷

累積分布関数

$$C_k(r) = \int_{|\mathbf{x}| < r} d^3x \phi_k(\mathbf{x})^\dagger \phi_k(\mathbf{x})$$

$r = 0.8 r_0$  まで  
1/2に漸近。



# Contents

## ✓ 1. Introduction

本研究:磁気単極子の存在下における電子場のDirac方程式をUV finiteな形で解くことでWitten効果の微視的機構を明らかにする。

## ✓ 2. NaïveなDirac方程式の束縛解(review of Yamaishi 1983)

磁気単極子に局在するゼロモードが存在。その物理的意味とWitten効果との関係が明らかではない。

## ✓ 3. 正則化されたDirac方程式の解とWitten effectの根本的な原因

強い磁場が原子間隔くらいの有限領域にdomain-wall fermion系を作る。その端状態のゼロモードが電荷の起源。Yamagishiらカイラルな境界条件も動的に説明。

## ✓ 4. Atiyah-Singer の指数定理とCobordismによる半整数電荷の説明

磁気単極子まわりの $S^2$  domain-wall上のゼロモードは表面の端状態とペアで存在。トンネル効果で混ざり、half-fillingではその一つのみが占有され、磁気単極子まわりには波動関数の半分だけが局在する(もう半分は表面に分布)。

## 5. 有効Maxwell理論の再解釈と実数磁荷

## 6. まとめ



# Maxwell理論再解釈

Original description by Witten

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{\theta}{8\pi^2} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \quad q_e = \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\theta}{4\pi^2} \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{\theta q_m}{2\pi}$$

私たちの再解釈 =  $\theta$ 項に domain-wall ができる。

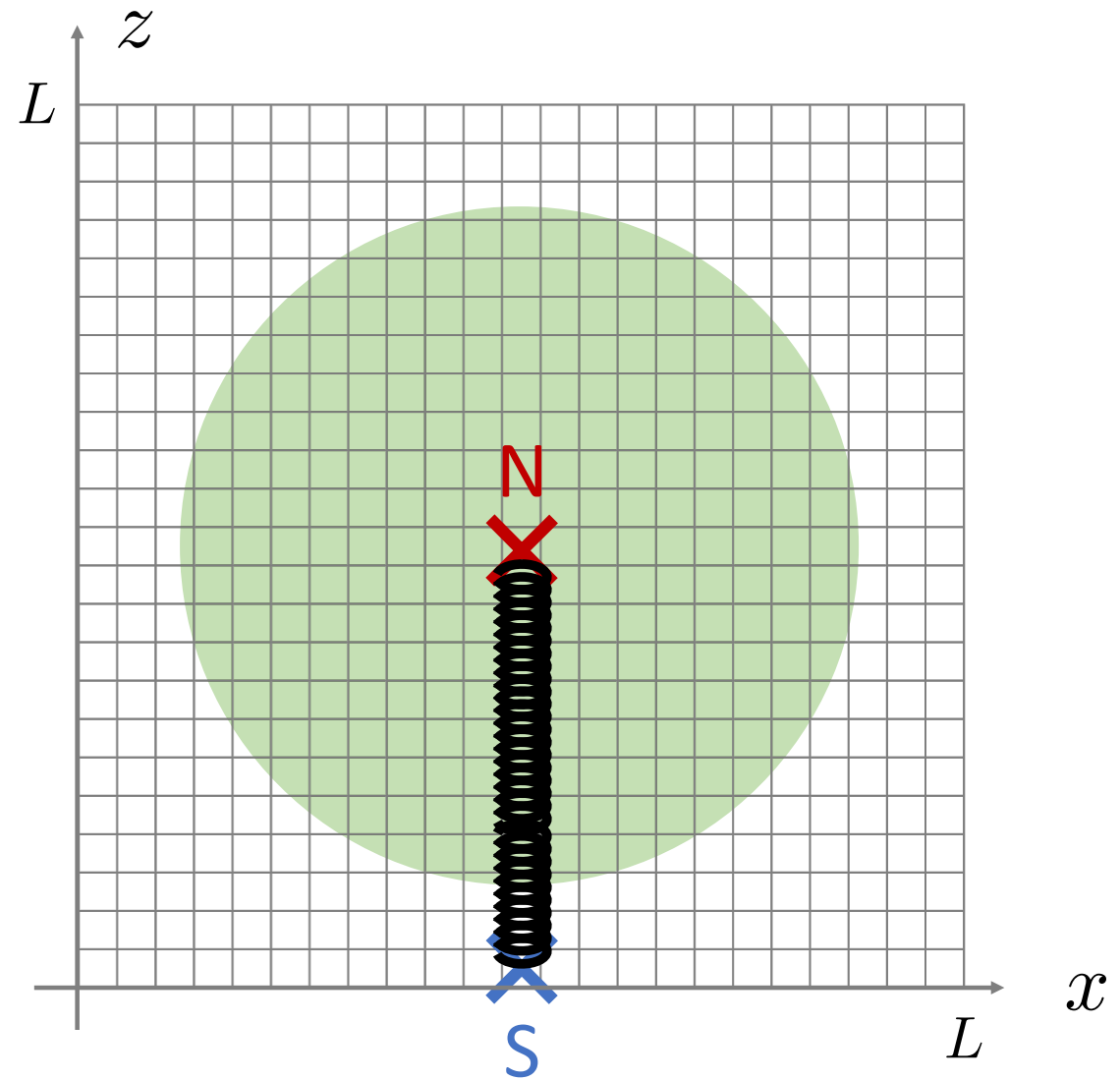
$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{8\pi^2} \partial_\mu \left[ \theta(r) \tilde{F}^{\mu\nu} \right] \quad q_e = \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi^2} \int d^3x \nabla \theta(r) \cdot \mathbf{B} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int d^3x \pi \delta(r - r_1) \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{B} = -\frac{\theta q_m}{2\pi} \end{aligned}$$

結果は同じ！でも  $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$  でなくともよい。

本物の磁気単極子がなくとも

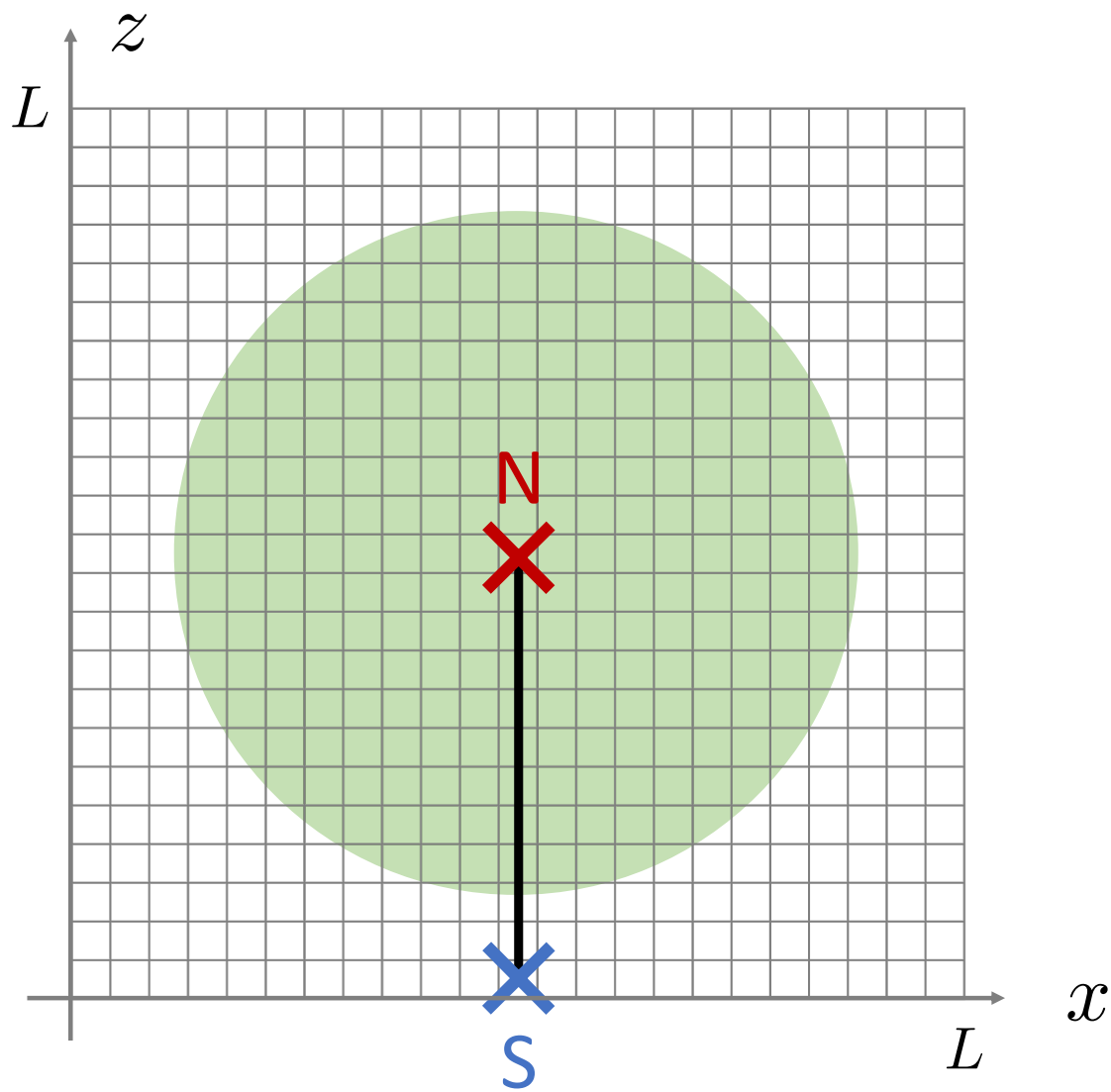
Witten効果は見えるかもしれない:

細いソレノイドをトポロジカル絶縁体の中にさして電流を流して磁場をかけると電荷を獲得できるのではないか？



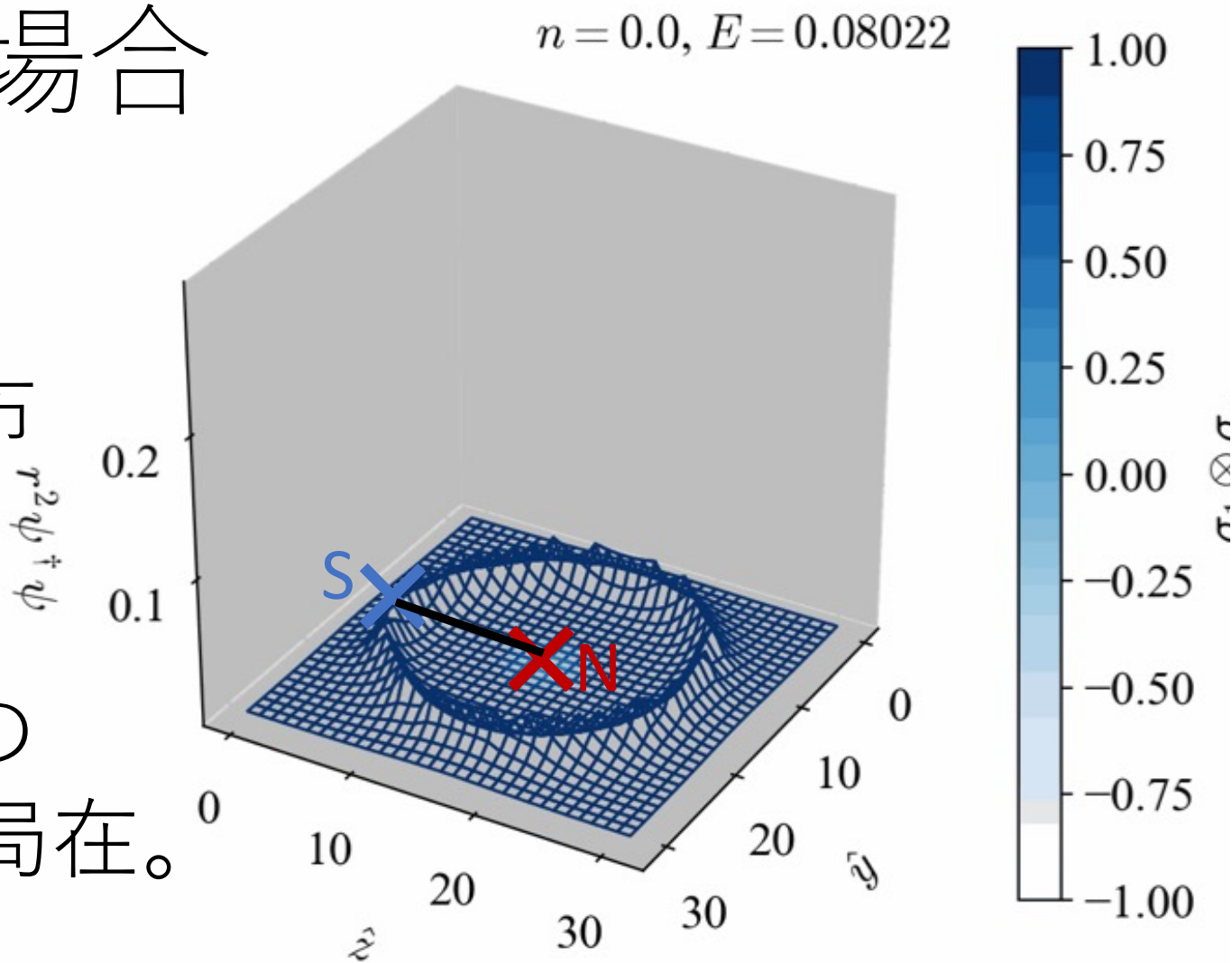
原子間隔程度の細かいソレノイドは難しい。  
格子でシミュレーションならできる:

$n$  を0から1に連続的に変化させ何が起こるか見てみよう。



# 連続磁荷の場合

$x = (L+1)/2$  平面  
の波動関数分布  
(weighted by  $r^2$ )  
 $n=0$   
では全て外側の  
Domain-wallに局在。

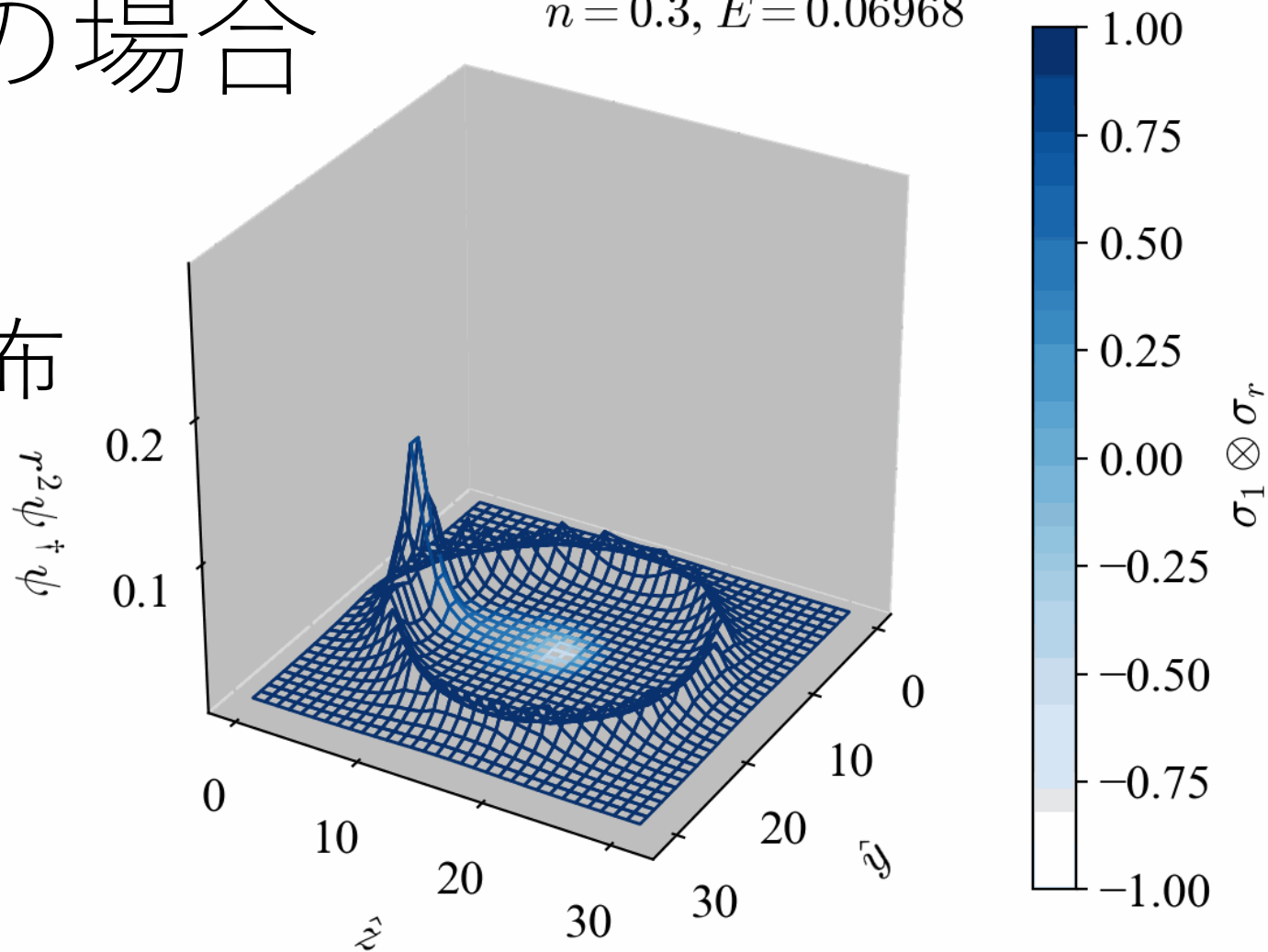


# 連続磁荷の場合

$n = 0.3, E = 0.06968$

$x = (L+1)/2$  平面  
の波動関数分布

$n=0.3$



# 連続磁荷の場合

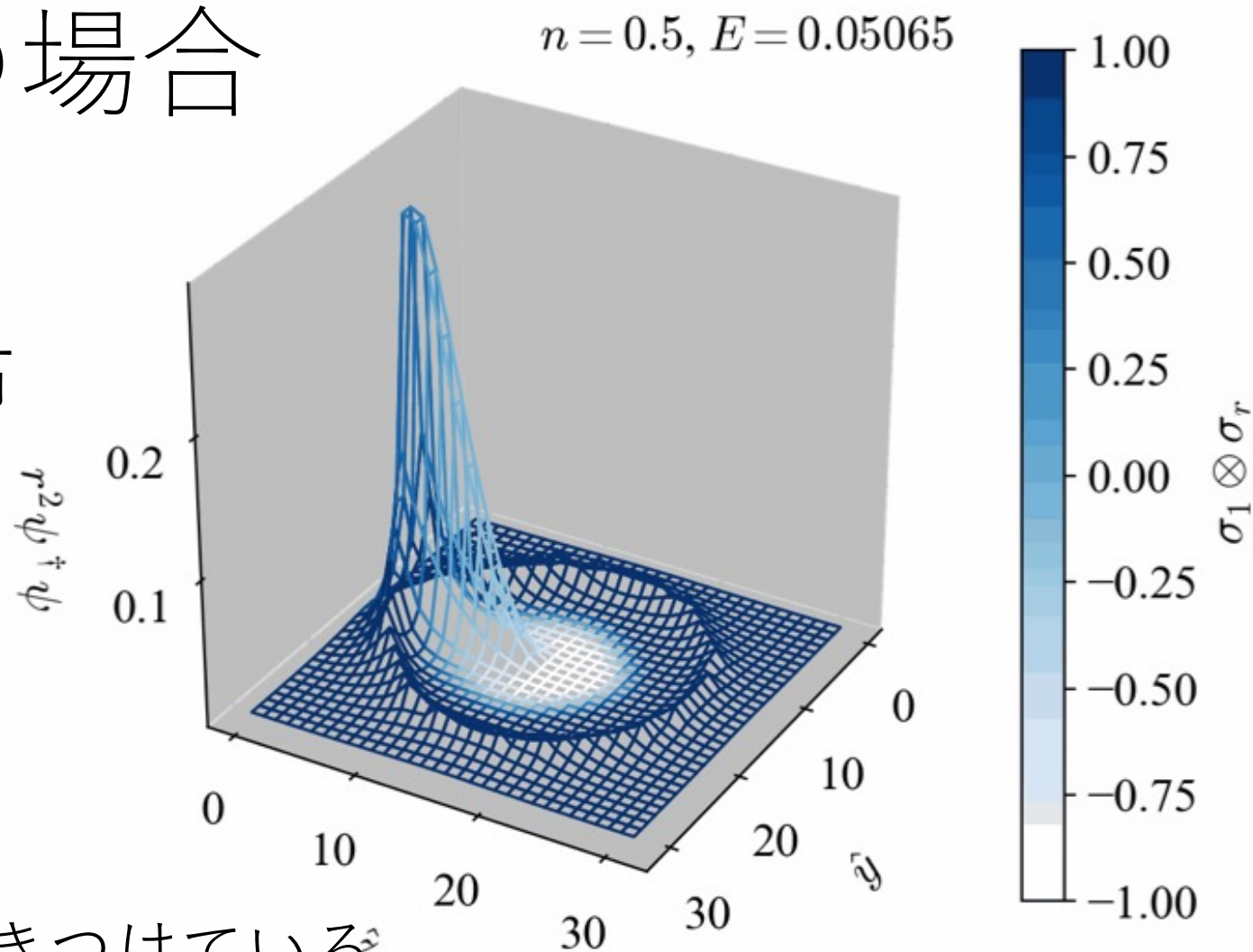
$x = (L+1)/2$  平面  
の波動関数分布

$n=0.5$

Dirac string

まわりが normal insu

Latorになり電子を引きつけている。

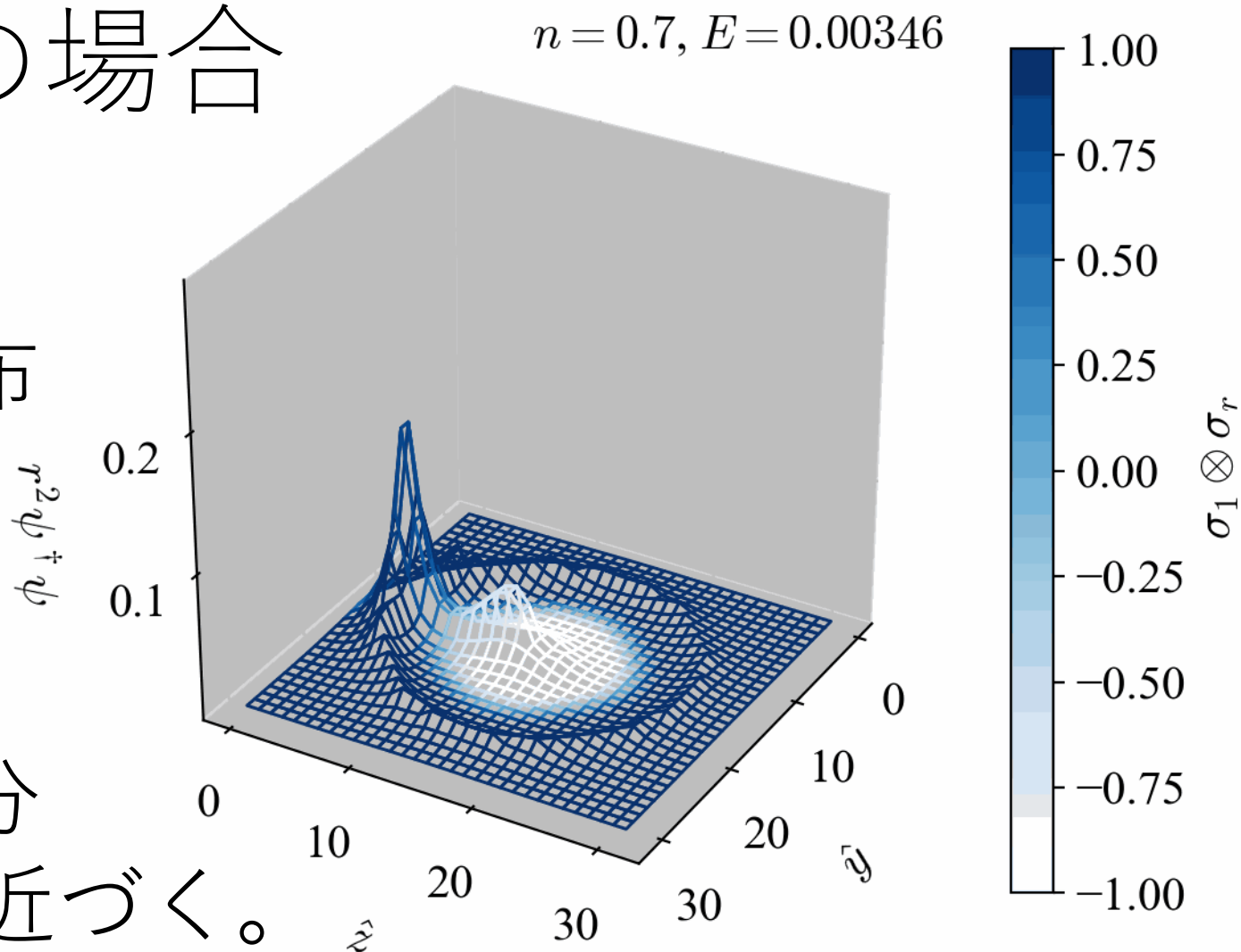


# 連続磁荷の場合

$x = (L+1)/2$  平面  
の波動関数分布

$n=0.7$

波動関数の半分  
がmonopoleに近づく。

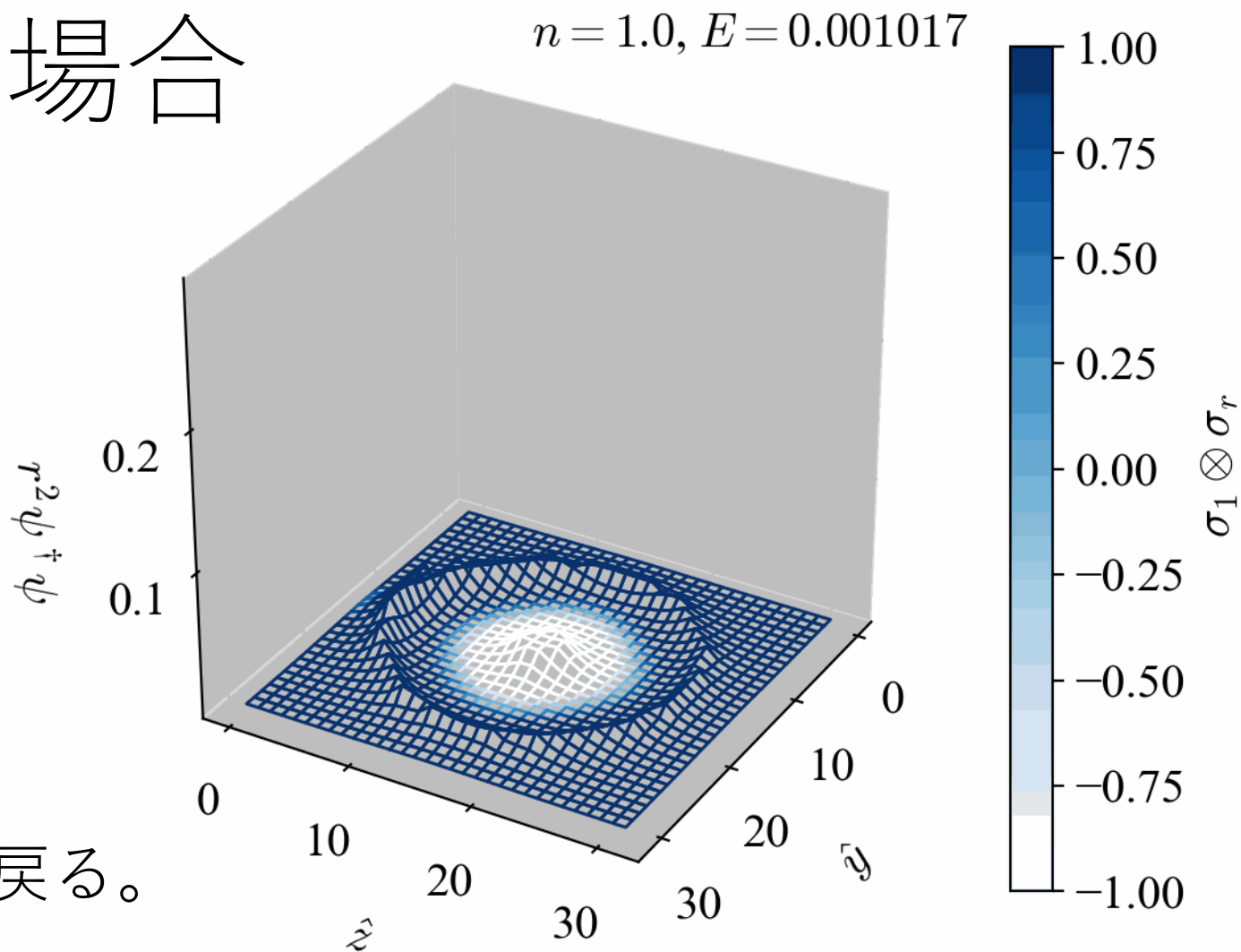


# 連続磁荷の場合

$x = (L+1)/2$  平面  
の波動関数分布

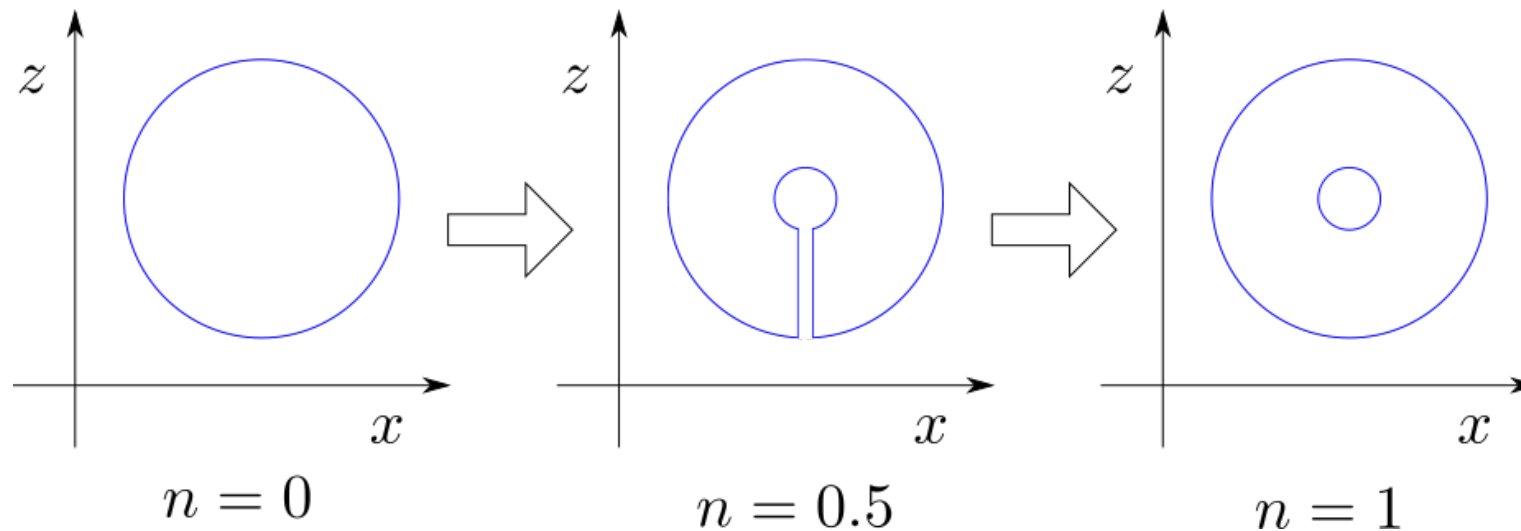
$n=1.0$

Dirac stringまわりは  
Topological insulatorに戻る。





# Domain-wallのtopology change



Domain-wall の内側がtopological insulator, 外側がnormal insulator.  
Dirac sting まわりがnormal insulatorにかわる  $\rightarrow$  2つのsphereに分離  
することでエッジ状態の電荷の半分がmonopoleに供給される。

# Contents

## ✓ 1. Introduction

本研究:磁気単極子の存在下における電子場のDirac方程式をUV finiteな形で解くことでWitten効果の微視的機構を明らかにする。

## ✓ 2. NaïveなDirac方程式の束縛解(review of Yamaishi 1983)

磁気単極子に局在するゼロモードが存在。その物理的意味とWitten効果との関係が明らかではない。

## ✓ 3. 正則化されたDirac方程式の解とWitten effectの根本的な原因

強い磁場が原子間隔くらいの有限領域にdomain-wallを作る。その端状態のゼロモードが電荷の起源。Yamagishiらカイラルな境界条件も動的に説明。

## ✓ 4. Atiyah-Singer の指数定理とCobordismによる半整数電荷の説明

磁気単極子まわりの $S^2$  domain-wall上のゼロモードは表面の端状態とペアで存在。トンネル効果で混ざり、half-fillingではその一つのみが占有され、磁気単極子まわりには波動関数の半分だけが局在する(もう半分は表面に分布)。

## ✓ 5. 有効Maxwell理論の再解釈と実数磁荷

本物の気単極子がなくてもWitten効果は実現可能。細いソレノイドをトポロジカル絶縁体の中に入れるとソレノイドを渡って電荷 $1/2$ がポンプされる。

## 6. まとめ

# まとめ

**Witten 効果:**磁気単極子をトポロジカル絶縁体に入れると、 $1/2$ の電荷を持つ。その微視的機構を明らかにした。

1. 普通の絶縁体とトポロジカル絶縁体はどう違うのか？

PV正則化の質量と比べて相対的に負の質量であればトポロジカル。

2. どうして電子が束縛されるのか？

磁気単極子の磁場が強い正の質量補正を生み、**domain-wall**を生成するから(負の質量のときのみ)。

3. どうしてカイラルな境界条件が課されるのか？

**domain-wall**に局在するゼロモードが**Atiyah-Singer**の指数で守られている。

4. どうして電荷が $1/2$ になるのか？

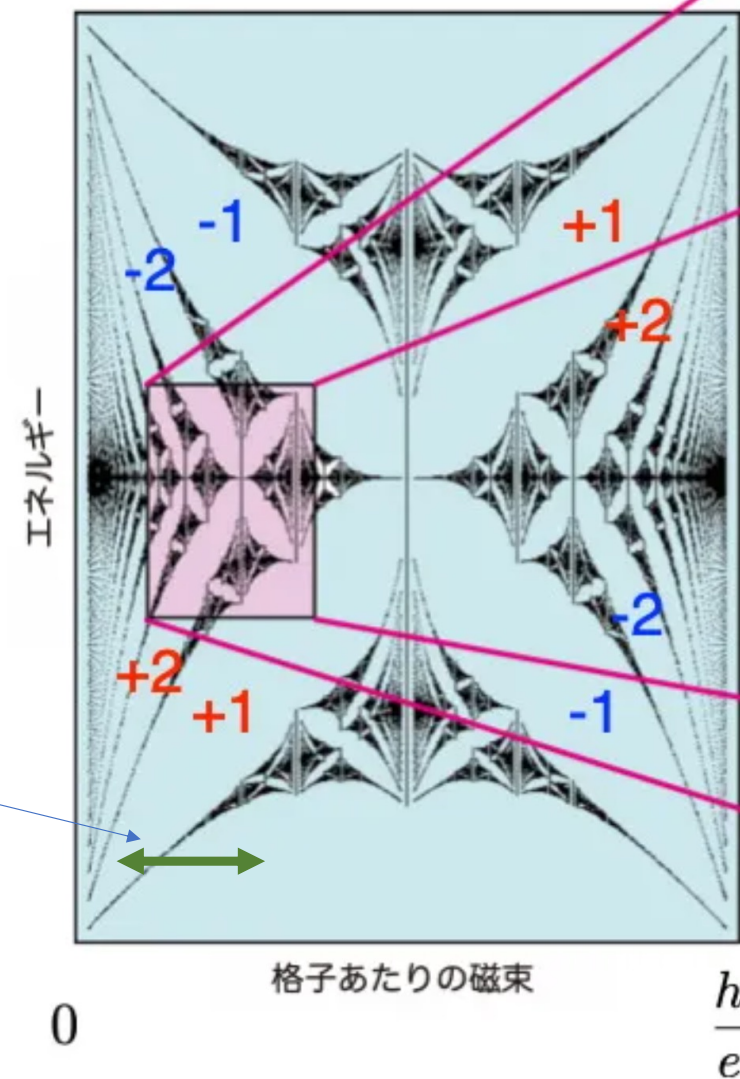
**AS**指数の**cobordism**不変性より、トポロジカル絶縁体の表面の端状態とペアで存在、トンネル効果で混ざり、**half-filling**ではその1つのみが占有され、磁気単極子まわりには波動関数の半分だけが局在するから(もう半分は表面に局在)。

# 先行研究との比較1

磁場を変えると topological phaseが  
変わる現象は 量子Hall効果でおなじみ。

私たちの解析は  
ここに対応

初貝研究室@筑波大のwebpageより



# 先行研究との比較2

Wilson 項を加える解析

Zhao and Shen 2012, Tyner & Goswami 2022

は私たちと本質的に同じ解を導出。

$$\psi_{j,j_3}^{\text{mono}} = \frac{B e^{-\frac{M_{\text{PV}} r}{2}}}{\sqrt{r}} I_\nu(\kappa r) \begin{pmatrix} 1 \\ -s \end{pmatrix} \otimes \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi)$$

しかし、この解が有限の半径にピークを持ち、2次元球面の Dirac 方程式の解になっていることには気づかなかった模様。

# 先行研究との比較3

数値的な解析

Rosenberg and Franz 2010,

Zhao and Shen 2012,

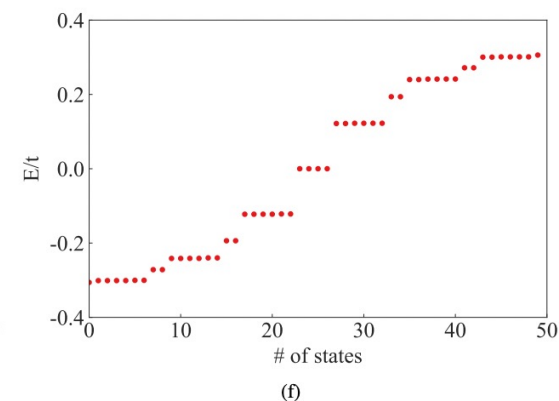
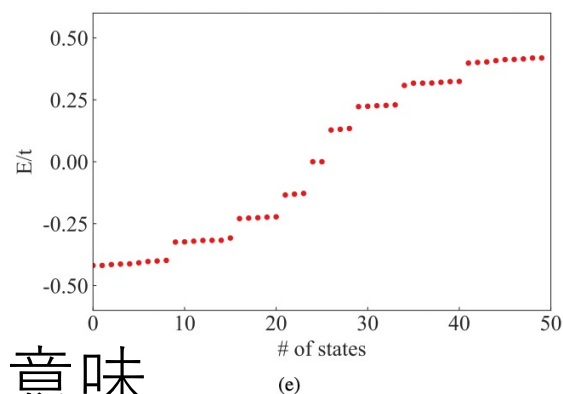
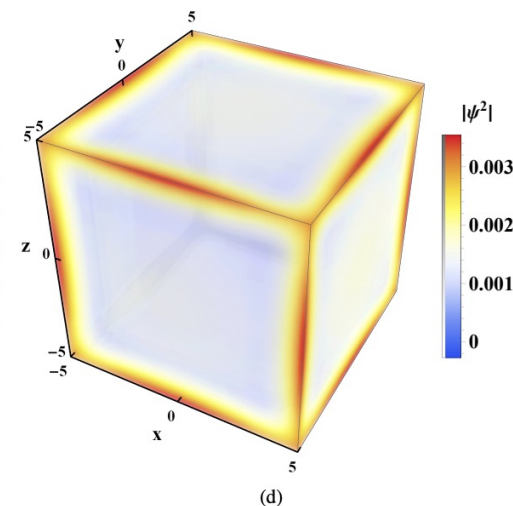
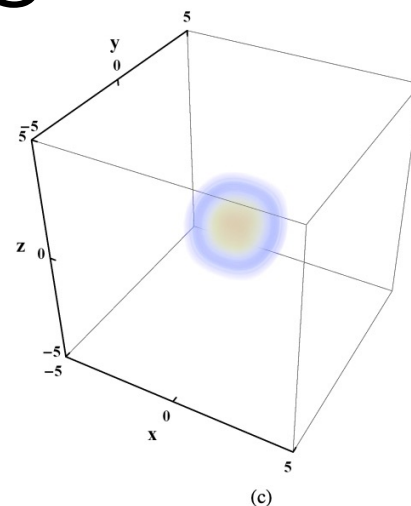
Tyner & Goswami 2022

は表面状態との

ペアリングを数値的に発見。

しかし、そのトポロジカルな意味

(= 2次元球のAtiyah-Singer指数)には言及なし。



# まとめ

**Witten 効果:**磁気単極子をトポロジカル絶縁体に入れると、 $1/2$ の電荷を持つ。その微視的機構を明らかにした。

1. 普通の絶縁体とトポロジカル絶縁体はどう違うのか？

PV正則化の質量と比べて相対的に負の質量であればトポロジカル。

2. どうして電子が束縛されるのか？

磁気単極子の磁場が強い正の質量補正を生み、**domain-wall**を生成するから(負の質量のときのみ)。

3. どうしてカイラルな境界条件が課されるのか？

**domain-wall**に局在するゼロモードが**Atiyah-Singer**の指数で守られている。

4. どうして電荷が $1/2$ になるのか？

**AS**指数の**cobordism**不変性より、トポロジカル絶縁体の表面の端状態とペアで存在、トンネル効果で混ざり、**half-filling**ではその1つのみが占有され、磁気単極子まわりには波動関数の半分だけが局在するから(もう半分は表面に局在)。

Backup slides



# Subtlety of the charge

The effective theory indicates  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{\theta}{8\pi^2} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}$

$$q_e = \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\theta}{4\pi^2} \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{\theta q_m}{2\pi}$$

At  $\theta = \pi \bmod 2\pi Z$

$q_m = 1$  monopole has  $-1/2 \bmod Z$  electric charge.

Breaking of particle-hole symmetry would prefer  $-1/2$  (half of one electron).