

# 格子ゲージ理論における指数定理

深谷英則(大阪大学)

スライドURL:

<http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~hfukaya/slides/Fukaya-LatIndex.pdf>

# 自己紹介

深谷英則 (ふかやひでのり) hfukaya[at]het.phys.sci.osaka-u.ac.jp

出身: 静岡県浜松市

家族: 妻&こども3人

\* 深谷賢治さんとは(私の知る限り)縁戚関係にありません。

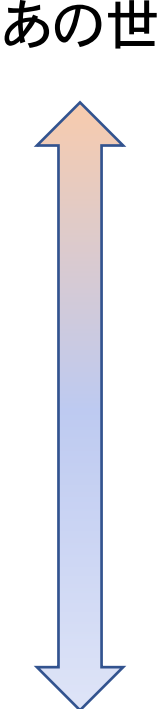
2006年 京都大学にて博士(理学)取得

2006-2010 理研、Niels Bohr 研究所(デンマーク)、名古屋大などでポスドク&特任助教

2010- 大阪大学理学研究科助教

専門: 素粒子論 (格子ゲージ理論)

# 素粒子論の3つの分野

	何を扱う?	エネルギー(1/波長)	
超弦理論	重力を含む全て (top down)	$10^{19}$ GeV	
素粒子現象論	素粒子標準模型 を超える物理 (bottom up)	1000-10000 GeV (現在の加速器の限界)	
格子ゲージ理論	(主に)素粒子標準理論の強い力	1 GeV [陽子の質量]	

# 素粒子論の3つの分野

## 数学との交流

超弦理論

多い  
(Witten, Seiberg, Gukov...)

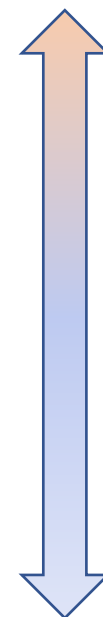
素粒子現象論

格子ゲージ理論

少ない

でも実は数学的に一番 well-defined  
かも。(有限次元ベクトル空間で書ける)

あの世



この世

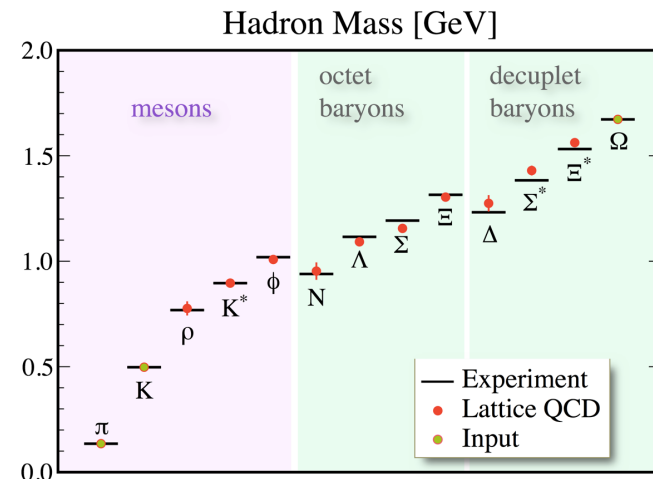


# 格子ゲージ理論でやっていること

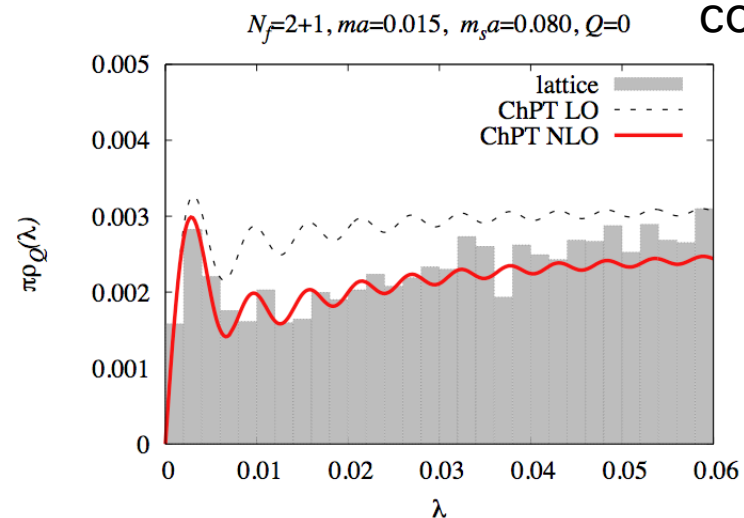
強い相互作用は解析的に理論計算できない  
(結合が強すぎる)。

→ **格子上に場の量子論を粗視化**、スーパーコンピュータにのせてシミュレーション=経路積分して理論計算する。

世界最速の富岳もガンガン使っています。



ハドロン質量  
PACS-CS  
collaboration



カイラル対称性の自発的破れの検証  
JLQCD 2010

# 格子ゲージ理論でやっていること ＝強い相互作用をきちんと計算する

でも意外とほかの分野との接点も…

1. Domain-wall fermion [Kaplan 1992] = クォーク場を5次元トポロジカル絶縁体の4次元エッジ状態として扱う手法
2. 数学的にしっかりしている。経路積分が有限でwell-defineな多重積分。また、離散化された空間なのにAtiyah-Singerの指数定理が定式化できたりする ← 古田幹雄氏驚く(2018)

# 数学者のみなさんとの共同研究

2017 物理屋でもわかるAtiyah-Patodi-Singer (APS)指数(連続理論)

深谷、大野木、山口(阪大)が発見法的に提案(計算も摂動論) [ [arXiv:1710.03379](https://arxiv.org/abs/1710.03379) ]

2018 古田(東大):「数学者への挑戦と受け止めました」

2019 物理屋でもわかるAPS指数の数学的証明

深谷、古田、松尾(名大)、大野木、山口、山下(京大) [ [arXiv:1910.01987](https://arxiv.org/abs/1910.01987) ]

2019 物理屋でもわかるAPS指数の格子理論への応用

阪大のPD+学生の川井、森、松木、中山らと摂動計算 [ [arXiv:1910.09675](https://arxiv.org/abs/1910.09675) ]

2020 物理屋でもわかる格子上のAS, APS指数の数学的定式化

in progress.

# 本講演の目標

1. 数学のみなさんに 離散化された格子場の理論(有限次元ベクトル空間)でもindex が定義できることに驚いていただく。
2. 物性のみなさんに 格子ゲージ理論で質量ゼロのフェルミオンを扱うにはトポロジカル絶縁体とそっくりな構造を**使うほかない**ことを理解いただく。「この世は5次元トポロジカル絶縁体の4次元エッジ状態かもしれない」

8割は非専門家へのレビュー、残り2割(時間があれば)で最近の研究:  
格子理論上のAPS指数定理の話をしてします。

スライドURL:

<http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~hfukaya/slides/Fukaya-LatIndex.pdf>

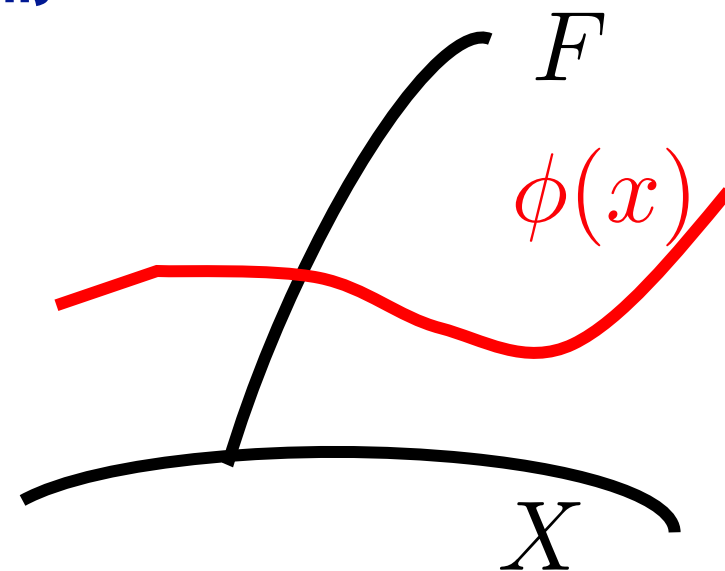
## 2. 格子ゲージ理論とは

## 2.1 まずは連続時空の場の理論

「場の量子論とはファイバー束の統計力学である。」

時空=底空間  $X$       場=ファイバー束の切断

$$\phi(x) \in \Gamma(X, E) \quad x \in X$$



場の量子論の経路積分=ファイバー束のありとあらゆる切断のとり方に対して統計平均をとること。

ただし、その確率分布はHamiltonianではなく「作用」で与えられる。

$$p \propto \exp(-S[\phi]) \quad S : \Gamma(X, E) \rightarrow \mathbb{C}$$

# ゲージ原理: ファイバー束の選び方

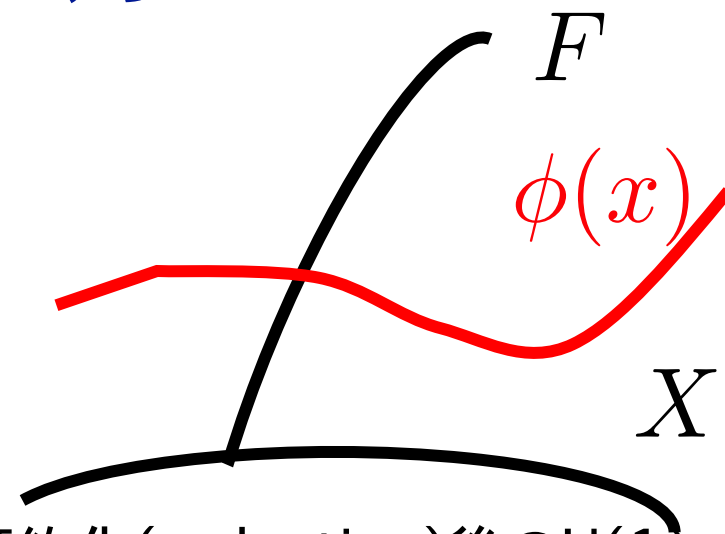
1. まずゲージ群を決める=主束を決める

素粒子標準模型は  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  束

$SU(3)$ の接続 = グルーオン場(私の研究対象)

$SU(2)$ の接続 = W, Z boson場

$U(1)$ の接続 = 電磁場 (\* 正確には $SU(2) \times U(1) \rightarrow U(1)$ の束の簡約化(reduction)後の $U(1)$ 束。ゲージ対称性の自発的破れ。)



2. 物質場を決める= 主束の同伴束。どんな表現の場であってもいいはずだが自然は基本表現ばかり選んでいる。反粒子=複素共役表現の束。

クォーク場:  $SU(3)$ ,  $SU(2)$ ,  $U(1)$ 全てにチャージを持つ。

レプトン(電子、ニュートリノなど)場:  $SU(2)$ ,  $U(1)$ のチャージ。

Higgs場:  $SU(2)$ のチャージ

# 作用原理

作用  $S = \int_X dx \bar{\psi}(x) \psi(x) + \int_X dx \text{tr} F \wedge F$  および 同位ベクトル束  $\psi(x)$  の切断の  
テンソル積のうち、trivial 表現になるものの線形結合の空間積分。  
ただし係数は定数にとる。

さらにローレンツ変換(空間回転)に対してtrivial であることも要求。

例)  $\int_X dx \bar{\psi}(x) \psi(x) + \int_X dx \text{tr} F \wedge F$   $F = dA + AA$

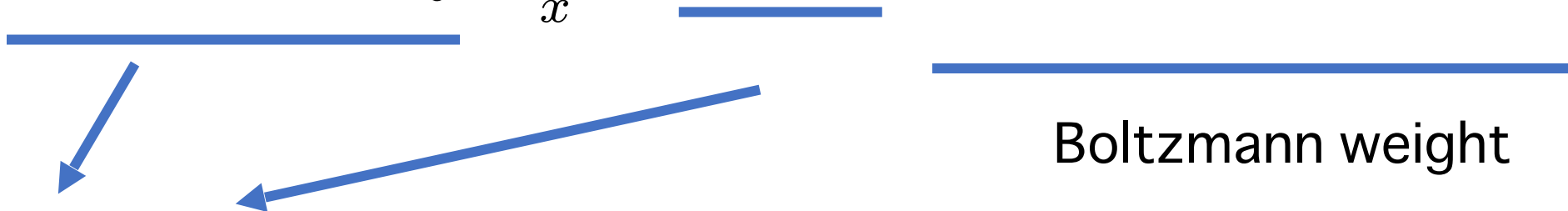
↑  
反クォーク

曲率



# 分配関数(経路積分)

$\hbar$  : Planck定数 ( $6.6 \times 10^{-34}$  Js)

$$Z = \int \prod_x d\psi(x) d\bar{\psi}(x) \int \prod_x dA(x) \exp \left[ -S(A, \psi, \bar{\psi}, \{\lambda_i\}) / \hbar \right]$$


Boltzmann weight

すべての切断、接続のとりかたについて足し上げる。

非加算無限個の多重積分

(数学的にはill-defined. 私見: 格子理論の極限として定義すべき)。

作用を通じて $\psi$ ,  $A$ が互いに影響 = 相互作用。

例) 電子がエネルギーを失うと光子が励起。

作用の最小値 ( $\hbar = 0$  の近似) = 古典場の理論(電磁場ならMaxwell方程式に従う)

# くりこみ可能性

作用のとりかたは無数にあるはずだが、

くりこみ可能性 = 波長の短い寄与を正則化したとき係数がコントロール可能

\* 長波長ではくりこみ不可能な寄与は効かないという見方もできる。

を要求すると、係数の質量次元が非負のものに限られる。

くりこみ可能な作用の選択肢はごくわずか。

$$S_{\text{QCD}} = \int_X \left[ -\frac{1}{4} \text{Tr} F * F - \bar{\psi} (D + m) \psi + \theta F F \right]$$

$$D = \sum_{\mu} \gamma^{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + A_{\mu} \right) \quad \text{Dirac operator} \quad \text{なぜか } \theta \sim 10^{-9} \text{ なので無視}$$

# 量子電磁気学(QED)

数学的にwell-definedでないものがどうして計算できるのか?

(意味あるの?)

$$Z_{\text{QED}}(e) = \int D A D \psi \exp \left\{ \int_X \left[ -\frac{1}{4} \text{Tr} F * F - \bar{\psi} (\gamma^\mu (\partial_\mu + \underline{ieA_\mu}) + m) \psi \right] \right\}$$

実は分配関数はeの項をのぞいてGauss積分。

$$\rightarrow \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \sim \frac{1}{137} \quad \text{で(漸近)展開して無理やり積分。}$$

$O(\alpha^5)$  の計算は**10桁の精度で実験と一致**。髪の毛vs.地球一周

数十万個のFeynmann diagramの計算。木下東一郎(コーネル大)のグループが主導<sub>p5</sub>

# 量子色力学(QCD)

強い相互作用(クォークとグルーオンのSU(3)ゲージ理論)では

$$Z_{\text{QCD}}(g) = \int D A D \psi \exp \left\{ \int_X \left[ -\frac{1}{4} \text{Tr} F * F - \bar{\psi} (\gamma^\mu (\partial_\mu + i g A_\mu) + m) \psi \right] \right\}$$
$$\alpha_S = \frac{g^2}{4\pi\hbar c} \sim 1$$

なので摂動展開できない。無理やりやってもクォーク3個の束縛状態として陽子が存在するなどの記述は不可能。

→ 格子理論で粗視化してコンピュータに計算させる。格子QCD

4次元の場の理論は自由度が膨大。スパコンが必要。

\* 歴史的にはQCDの**ために**スパコンが発展。

CP-PACS (1996年世界1を記録)は(ほぼ)QCD専用機。

## 2.2 格子ゲージ理論

格子ゲージ理論 = 底空間を正方格子点 (with 周期境界条件) 上に離散化、格子間隔を  $a$  とする。

フェルミオン場  $\psi(x)$  を各点(site)に代表させる (ファイバーは連続)。

ゲージ場(gluon場)(接続)  $U_\mu(x) \in G$

をリンクにおく。 
$$U_\mu(x) \sim P \exp \left( i \int_x^{x+\hat{\mu}a} dx^\nu A_\nu(x) \right)$$

となることを期待して、ゲージ変換を  $U_\mu(x) \rightarrow g^\dagger(x) U_\mu(x) g(x + \hat{\mu}a)$

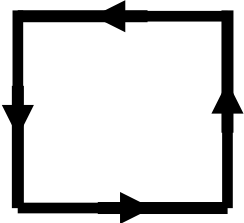
で与える。  $g(x) \in G$  はsite上におく。

# Gauge不変な作用の構成

Q. リンク変数を用いて作用(Gのtrivial 表現)を作るにはどうしたらよいか?

$$U_\mu(x) \rightarrow g^\dagger(x) U_\mu(x) g(x + \hat{\mu}a)$$

A. ループを作ってトレースをとればよい。


$$= U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x)$$
$$\sim \exp [ia^2 F_{\mu\nu}]$$

Wilson のplaquette 作用(gluonの作用)

$$S_G = \frac{1}{2} \sum_{x, \{\mu, \nu\}} \text{Tr} \left[ \begin{array}{c} \text{clockwise loop} \\ + \\ \text{counterclockwise loop} \end{array} \right] \sim \text{const.} - \frac{a^4}{4} \text{tr} F_{\mu\nu}^2$$

# フェルミオン(quark)の作用

Fundamental表現の同伴束の切断。同時にSpin(4)  $\simeq SU(2)_L \times SU(2)_R$  の  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  表現であることも要求



2種類の共変差分

$$\psi(x - a\hat{\mu}) \quad \psi(x) \quad \psi(x + a\hat{\mu})$$

$$\nabla_{\mu}^f \psi(x) = [U_{\mu}(x)\psi(x + a\hat{\mu}) - \psi(x)]/a \quad \text{ゲージ変換性}$$

$$\nabla_{\mu}^b \psi(x) = [\psi(x) - U_{\mu}^{\dagger}(x - a\hat{\mu})\psi(x - a\hat{\mu})]/a \quad \nabla_{\mu}^{f,b} \psi(x) \rightarrow g(x)\nabla_{\mu}^{f,b} \psi(x)$$

Naïve Dirac 演算子(実は不十分)  $D = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \gamma^{\mu} (\nabla_{\mu}^f + \nabla_{\mu}^b) \quad \{\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\} = 2\delta_{\mu\nu}$

Quark 作用  $S_F = a^4 \sum_x \bar{\psi}(x)(D + m)\psi(x)$   $\bar{q}(x)$  :qの複素共役場  
 $m$  :質量

# 経路積分

空間を $T^4$ にとり、有限格子で分配関数を与える。

$$\int \prod_{x,\mu} d\bar{\psi}(x) d\psi(x) dU_\mu(x) \exp[-S_G - S_F]$$
$$= \int \prod_{x,\mu} dU_\mu(x) \exp[-S_G] \det(D + m)$$

↓ 群積分

\* フェルミオンはGauss積分してDirac演算子のdeterminantで書ける。

この多重積分をスパコン上でMonte Carlo法で評価。

より細かい格子で実行し、外挿 = 連続極限

より大きい格子で実行し、外挿 = 熱力学極限

目標は0(1)%の精度を達成、実験と比較。



# 3. Nielsen-Ninomiyaの定理

# Fermion ダブリング

自由フェルミオン粒子のDirac方程式

$$D\psi(x) = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \gamma^{\mu} (\nabla_{\mu}^f + \nabla_{\mu}^b) \psi(x) = \frac{1}{2a} \sum_{\mu} \gamma^{\mu} (\psi(x + a\hat{\mu}) - \psi(x - a\hat{\mu})) = 0.$$

Fourier変換  $\rightarrow \frac{1}{2a} \sum_{\mu} \gamma^{\mu} \psi(\tilde{p}) e^{ipx} (e^{ip_{\mu}a} - e^{-ip_{\mu}a}) = \frac{i}{a} \sum_{\mu} \gamma^{\mu} \psi(\tilde{p}) e^{ipx} \sin(p_{\mu}a) = 0.$

$p_{\mu} = 0, \frac{\pi}{a}$  にゼロ点(4方向あるので16点もある)。

$a \rightarrow 0$  でほしいのは  $p_{\mu} = 0$  だけ。

あとの15個は**非物理的自由度=ダブラー**

# Nielsen-Ninomiyaの定理 [1981]

格子理論のDirac演算子がいくつかの(場の理論に不可欠な)仮定の下で、chirality 演算子 ( $Z_2$  grading 演算子)

$$\gamma_5 = -\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$$

と反可換なとき、フェルミオンダブリングは避けられない。

\*その本質的理由は格子化により運動量空間が周期的になること。

$$p_\mu \rightarrow \frac{1}{a} \sin(p_\mu a)$$

# Wilson fermion [1974]

ダブラーを重くして理論から排除 (励起できない=存在しない)

$$D_W = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \gamma^{\mu} (\nabla_{\mu}^f + \nabla_{\mu}^b) - \frac{a}{2} \sum_{\mu} \nabla_{\mu}^f \nabla_{\mu}^b$$

Fourier変換

$$D_W \rightarrow \sum_{\mu} \gamma^{\mu} \frac{\sin(p_{\mu}a)}{a} + \underbrace{\frac{1}{a} \sum_{\mu} (1 - \cos(p_{\mu}a))}_{=W(\text{Wilson term})}$$

For  $p_{\mu} \sim 0$  ,  $W \sim 0$  , for  $p_{\mu} \sim \pi/a$  ,  $W \sim 2n/a \rightarrow \infty$

$n$  : an integer

\* $\gamma_5$  Hermiticity :  $\gamma_5 D_W \gamma_5 = D_W^{\dagger}$

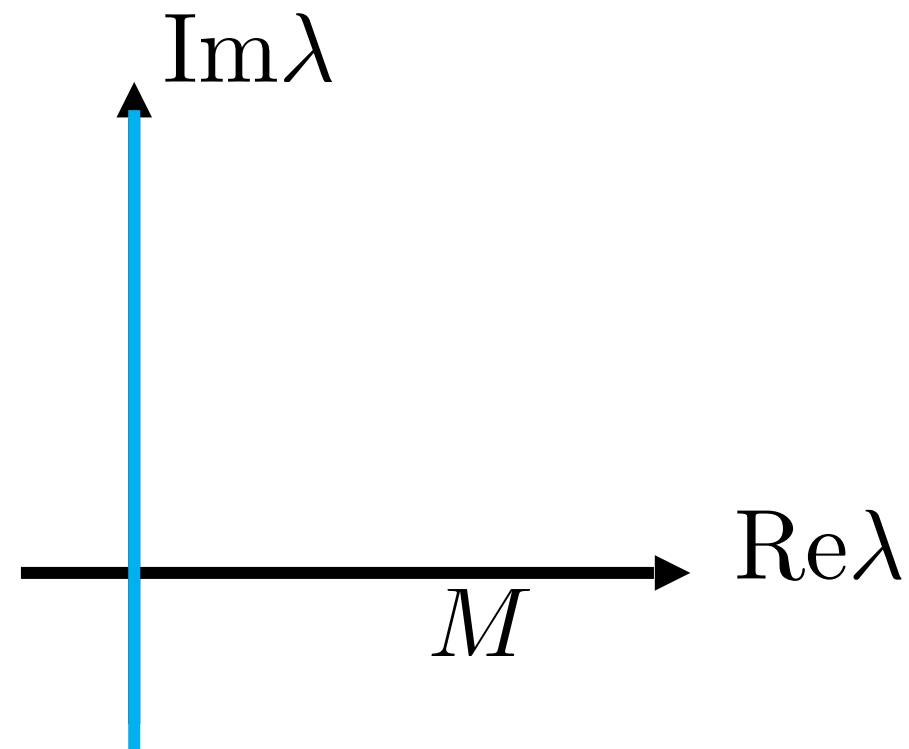
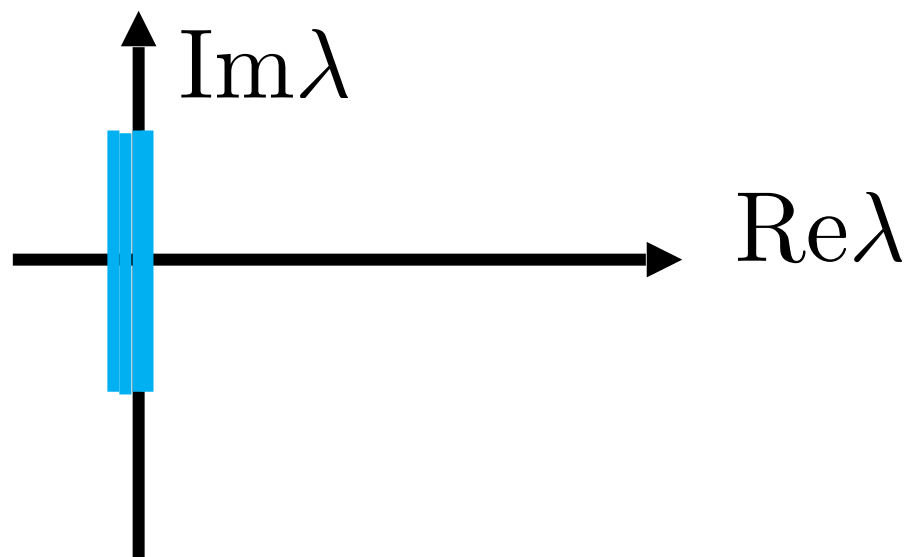
# 固有値分布

$$D + M$$

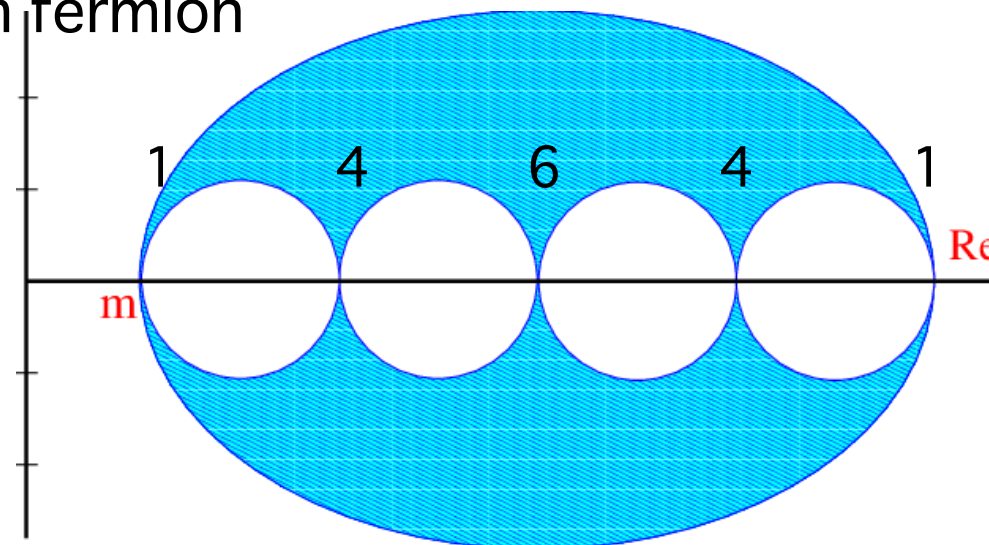
anti-Hermitian   Hermitian

連続理論でmassless Diracの固有値は虚軸に分布。質量項は固有値を実軸方向へずらす。

Naïve Diracは虚軸に16本分布



Wilson fermion



結論: 格子ゲージ理論において、カイラル対称性は破らなければならない

Nielsen-Ninomiya の定理 (1981): ダブラーを取り除くためには質量項が必要 = カイラル対称性を破るしかない。

$$\gamma_5 D_W + D_W \gamma_5 = 2W \gamma_5$$

そもそも格子上でトポロジーなんて議論できそうもない。  
「指数定理なんて絶対無理!」と考えられてきた。

$$n_+ - n_- = \frac{1}{32\pi^2} \int_X d^4x \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr}_c F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}(x)$$

Dirac方程式のカイラルな解の数

ゲージ場の巻きつき数

注) 物性理論の運動量空間は連続

# Ginsparg-Wilson relation [1982]

「もしカイラル対称性を保つ連続理論」で格子点“以外”の部分を積分しきれたとしたら、その格子理論のDirac演算子はどのようなものになるかの考察がなされた。

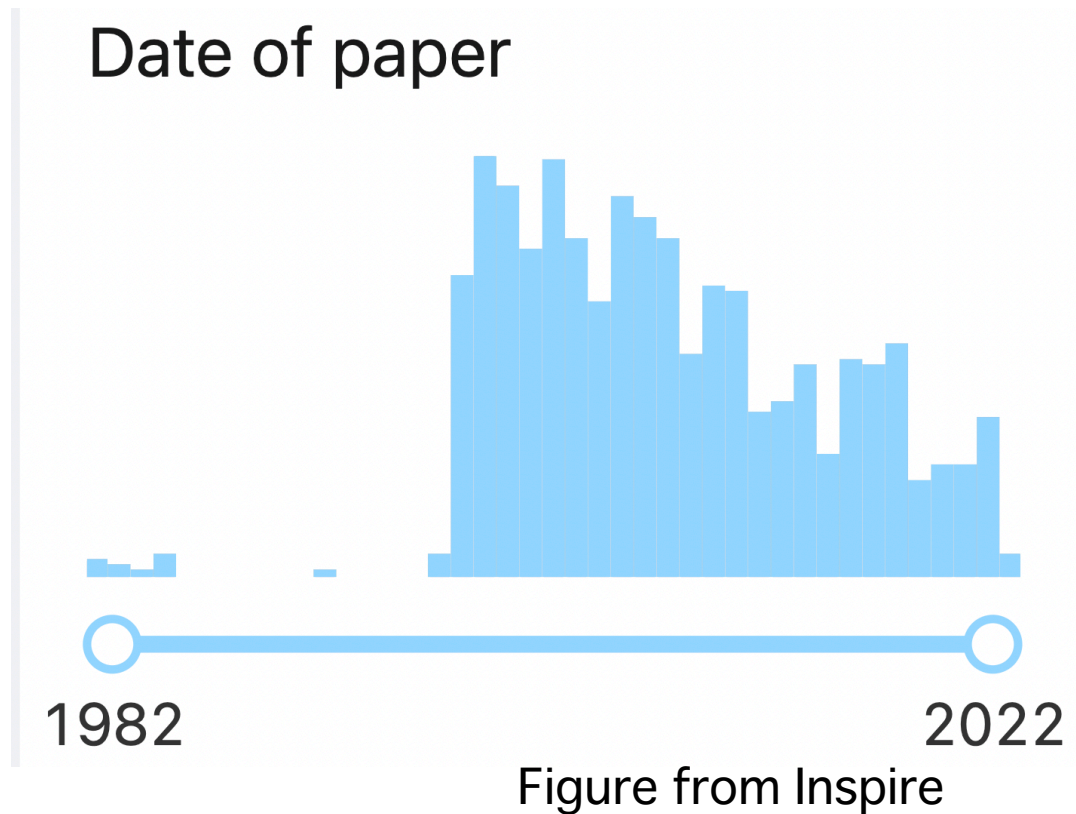
$$\gamma_5 D + D \gamma_5 = a D \gamma_5 D.$$

この論文は20年近く忘れ去られる。。。

しかし・・・

# Ginsparg-Wilson relation [1982]

全1184 citationの年分布



1998年に何かが起きた。



## ここまでのまとめ

1. 格子理論は有限格子点上のファイバー束の統計力学として定式化される。ゲージ場(接続) $\rightarrow$  link 変数。フェルミオン場(切断) $\rightarrow$  site変数。
2. Nielsen-Ninomiyaの定理は格子理論のDirac演算子がchirality 演算子( $Z_2$  grading)と反可換になれないことを要求する。=**left-rightが混ざってカイラル対称性は必ず壊れる。**) 指数定理なんて無理っぽい。

### [参考文献]

青木慎也「格子上の場の理論」シュプリンガーフェアラーク

# 4. Chiral symmetry on lattice

# カイラル対称性とは

連続理論のカイラル対称性：

$$D = \sum_{\mu} \gamma^{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + A_{\mu} \right) \quad \{\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\} = 2\delta_{\mu\nu}$$

質量ゼロのフェルミオンの作用

$$S_F = \int d^4x [\bar{\psi} D \psi]$$

は Dirac 演算子が  $\gamma_5 = -\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$  と反可換なので、

$$\text{カイラル変換} \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{i\alpha\gamma_5} \quad \psi(x) \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5} \psi(x)$$

の下で不変。カイラル表示では

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -1_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^{os} \\ |\uparrow\rangle \\ |\downarrow\rangle \\ \psi_4^{os} \end{pmatrix}$$

\* os : off-shell mode (classically zero)

$\gamma_5 = 1 \rightarrow$  right-handed

$\gamma_5 = -1 \rightarrow$  left-handed

# カイラル対称性とは

質量(行列)は  $\gamma_5$  と可換なので、カイラル対称性を破る。

$$\bar{\psi} M \psi(x) \rightarrow \bar{\psi} e^{2i\alpha\gamma_5} M \psi(x) \quad (= \bar{\psi}_L e^{2i\alpha} M \psi_R(x) + \bar{\psi}_R e^{-2i\alpha} M \psi_L(x))$$

left-rightが混ざる。

Wilson 項も全く同様。

$$\bar{\psi} W \psi = -\frac{a}{2} \sum_{\mu} \bar{\psi} \nabla_{\mu}^f \nabla_{\mu}^b \psi \rightarrow -\frac{a}{2} \sum_{\mu} \bar{\psi} e^{2i\alpha\gamma_5} \nabla_{\mu}^f \nabla_{\mu}^b \psi$$

ダブラーを排除するため質量を与える=カイラル対称性を破る

# Nielsen-Ninomiyaの定理再考

フェルミオンダブリングを避けるにはカイラル対称性を破る

= left, right が混ざる効果が必要 (Cf. Wilson fermion)。

-> 物理的に遠ざけたらどうか?

5次元方向に遠ざけてみよう

= Left-handed, right-handed fermion がエッジモードとして現れる

5次元トポロジカル絶縁体を考えよう

= domain-wall fermion [Kaplan, 1992]



# Domain-wall fermion (連続理論)

Jackiw and Rebbi 1976,  
Callan and Harvey 1985

$$D_{DW} = D^{5D} - M\epsilon(x_5) = \gamma_5(\partial_5 - \gamma_5 M\epsilon(x_5)) + D^{4D}$$

は edge-localized 解を持つ :

$$\epsilon(x_5) = \text{sign}x_5$$

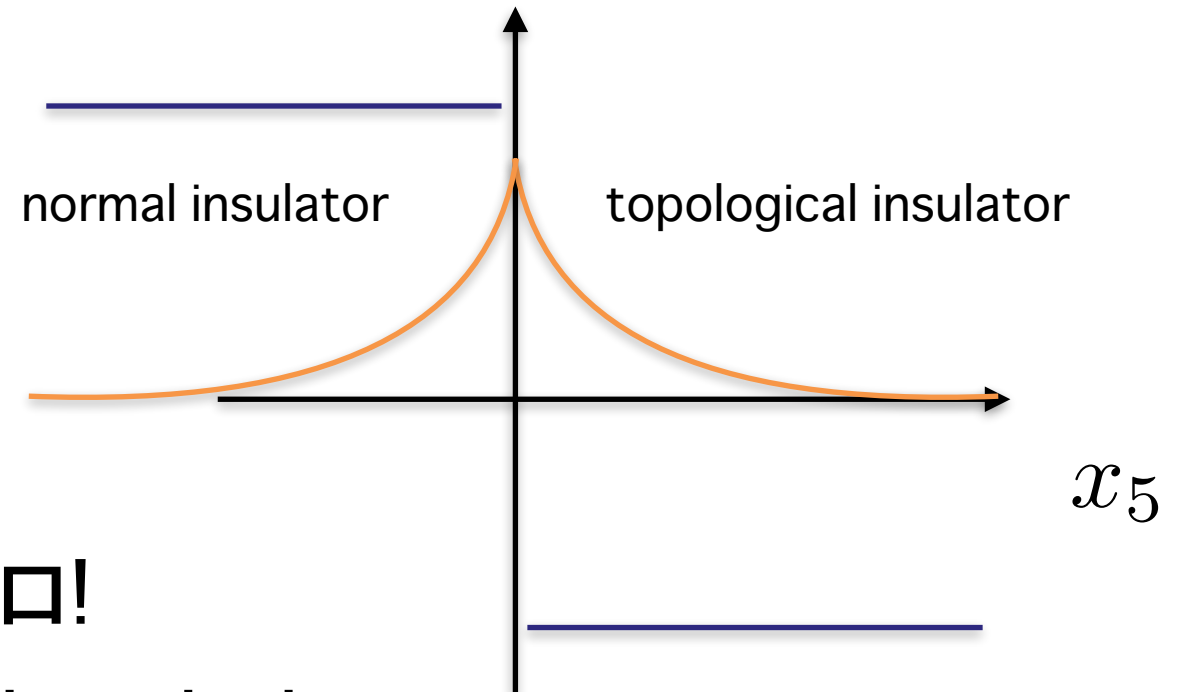
$$\psi(x) = c \exp(-M|x_5|)\phi^{4D}$$

$$D^{4D}\phi^{4D} = 0.$$

$$\gamma_5\phi^{4D} = -\phi^{4D}.$$

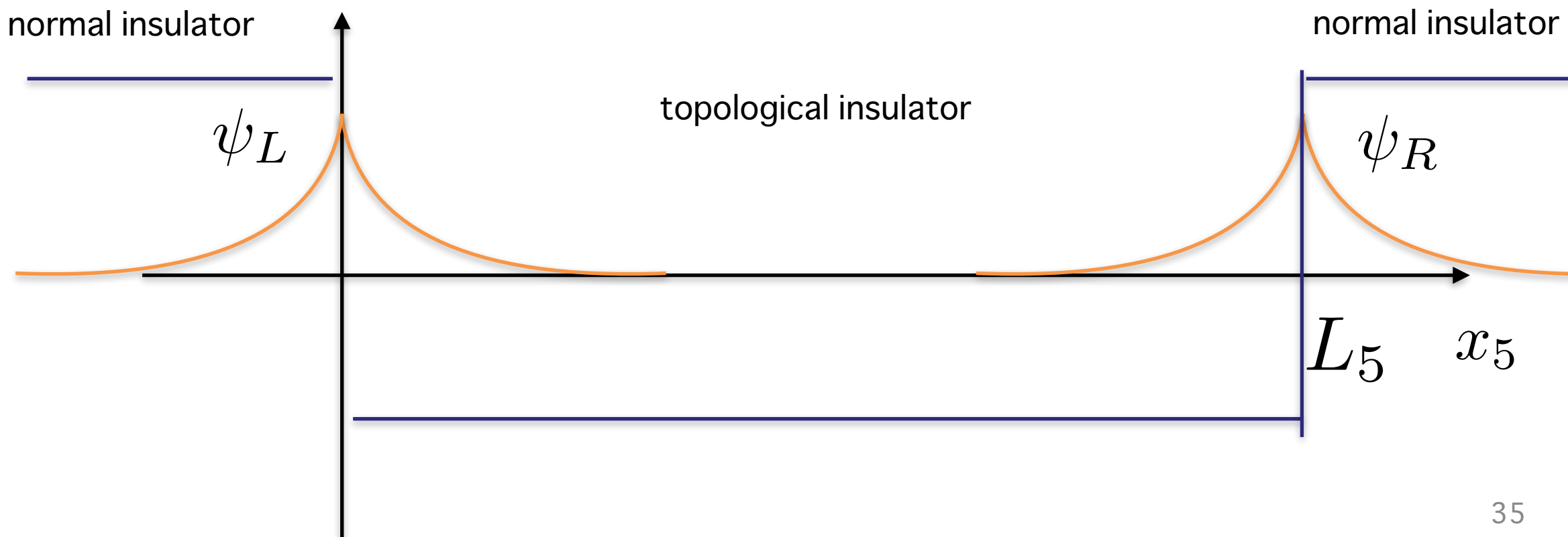
この状態はleft-handedで質量ゼロ!

質量の符号を反転させればright-handed。



# Domain-wall fermion (連続理論)

L5 が有限だと L/R mixing で質量(residual mass)が生じるが、それはL5 とともに指数関数的に減衰。



# Lattice Domain-wall fermion [Kaplan 1992]

5D Wilson Dirac 演算子でdomain-wall fermion を構成、  
カイラル対称性が  $L_5 \rightarrow \infty$  で成り立つことを確認。

$$D_{DW}^{\text{lat.}} = D_W^{5D} - \Lambda \epsilon(x_5 - a/2) \epsilon(L_5 - x_5 - a/2)$$

格子サイズは  $L^4 \times 2L_5$  ですべての方向に  
周期境界条件を課す

5次元方向にゲージ場は入れない。  $U_5(x) = 1$ 。

4次元方向のゲージ場は  $x_5$  依存性を持たせない

(5-軸は内部空間と解釈もできる)。

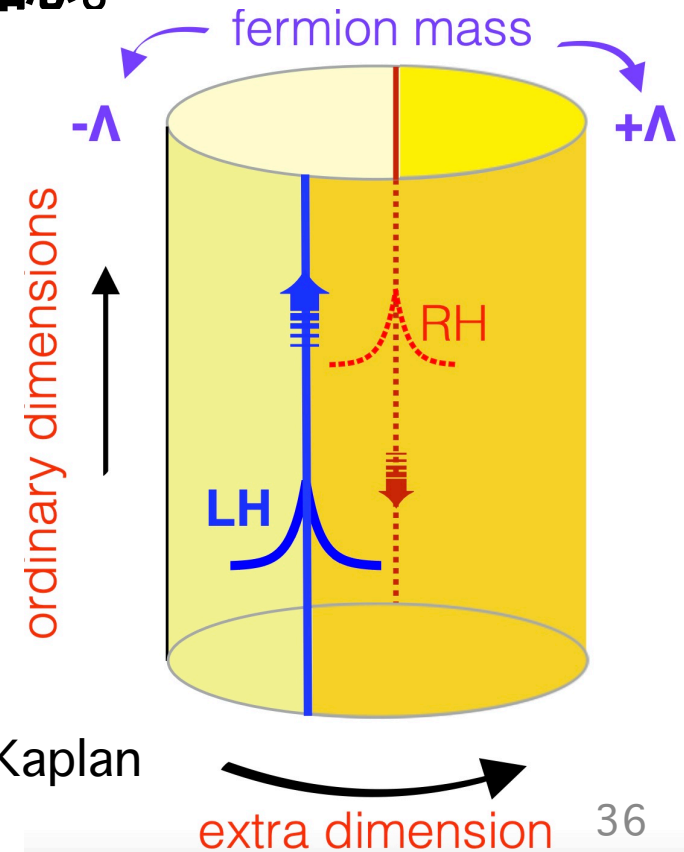


figure by Kaplan



# Shamir domain-wall fermion [Shamir 1993]

質量を非対称にとり、

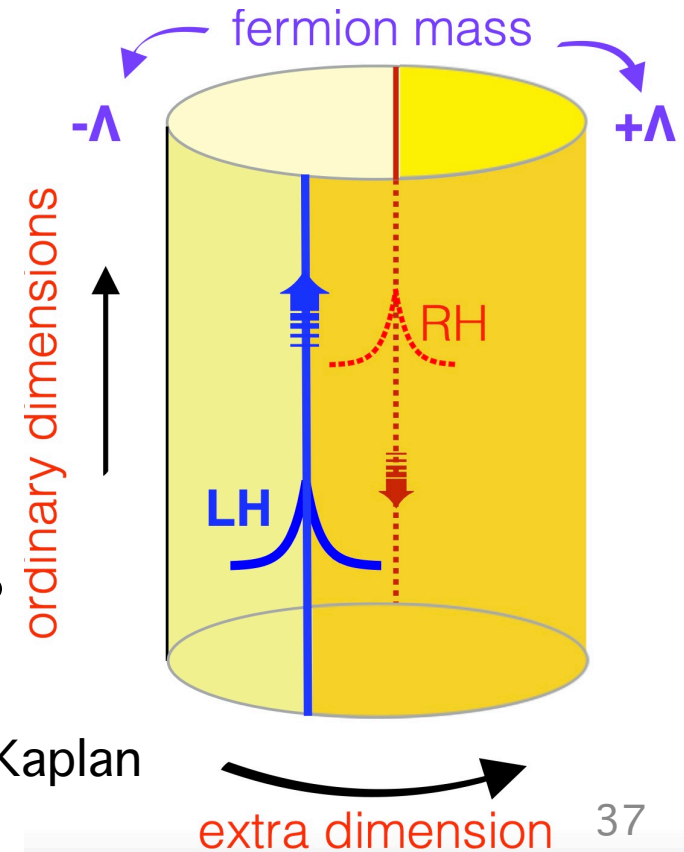
$$D_{DW}^{\text{lat.}} = D_W^{5D} - \Lambda\epsilon + \Lambda_2$$

$\Lambda + \Lambda_2 \rightarrow +\infty$ ,  $\Lambda - \Lambda_2 = M$  fixed.

の極限をとる。normal insulator region の  
フェルミオンをdecouple.

$x_5 < 0$ ,  $x_5 \geq L_5$  の格子は**はじめから無視できる**。

注) Dirichlet 境界条件とは違う(後述)。  
edge modeの存在も非自明。



# Shamir domain-wall fermion 詳細

$$D_{SDW} = D_W^{5D} - M = D_W - M + \frac{1}{2}\gamma^5(\partial_5^f + \partial_5^b) - \frac{a}{2}\partial_5^f\partial_5^b$$

shift 演算子  $S_5^\pm \phi(x) = \phi(x \pm a\hat{\mu}_5)$  で書き直すと、

$$\partial_5^f + \partial_5^b = \frac{S_5^+ - 1 + 1 - S_5^-}{a} = \frac{S_5^+ - S_5^-}{a} \quad a\partial_5^f\partial_5^b = \frac{(S_5^+ - 1)(1 - S_5^-)}{a} = \frac{S_5^+ + S_5^- - 2}{a}$$

$$aD_{SDW} = \underbrace{1 + D_W a - M a}_{=D_{\parallel}} - \underbrace{\frac{1 - \gamma_5}{2}}_{=P_-} S_5^+ - \underbrace{\frac{1 + \gamma_5}{2}}_{=P_+} S_5^-$$

ただし、 $\psi(x_5 < 0) = \psi(x_5 > L_5) = 0$  の境界条件 ( $x_5=0$ では $P_+$ にだけDirichlet. $P_-$ はfree)

# Shamir domain-wall fermion 詳細

5D方向だけ行列表示にすると、

$$aD_{SDW} = \begin{pmatrix} D_{\parallel} & -P_{-} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -P_{+} & D_{\parallel} & -P_{-} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -P_{+} & D_{\parallel} & -P_{-} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -P_{+} & D_{\parallel} \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow x_5 = 0 \\ \\ \\ \\ \rightarrow x_5 = L_5 \end{matrix}$$

Dirac 方程式の解を  $\pm$  chirality ごとに求める。

$$aD_{SDW}\psi = 0 \quad \begin{aligned} [D_{\parallel} - S_5^{+}] \psi_{-} &= 0. \\ [-S_5^{-} + D_{\parallel}] \psi_{+} &= 0. \end{aligned}$$

# Shamir domain-wall の edge 解

$$[D_{\parallel} - S_5^+] \psi_- = 0. \quad D_{\text{naive}} = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \gamma^{\mu} (\nabla_{\mu}^f + \nabla_{\mu}^b)$$
$$[D_{\text{naive}} + Wa + 1 - Ma - S_5^+] \psi = 0.$$

は  $x_5 = 0$  に局在する解が存在  $\psi = (1 - Ma + Wa)^{x_5} \phi_{4D}$

s.t.  $D_{\text{naive}} \phi_{4D} = 0$  if  $|1 - Ma + Wa| < 1$ .

$Ma < 0$  なら解なし(normal insulator)

$0 < Ma < 2$  なら1つだけ解あり[doublerは排除]

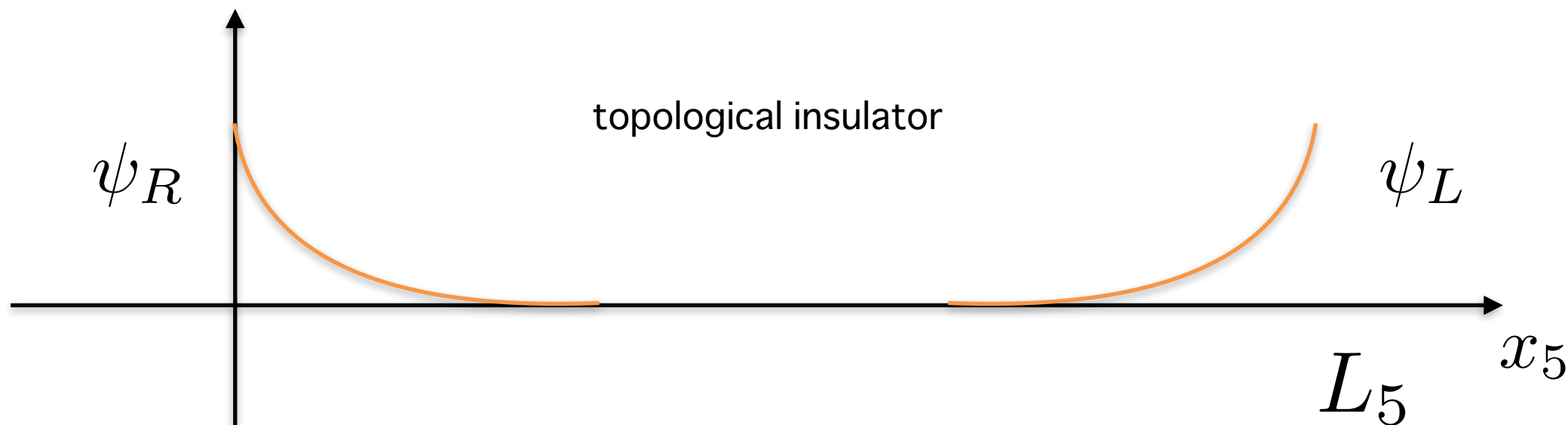
$Ma > 2$  ではdoublerの寄与もedge modeに(Chern数 $>1$ )。

ただし、 $\psi(x_5 = L_5) = 0$  を満たすためには  $L_5 = \infty$  が必要。

# Shamir domain-wall の edge 解

同様に  $[-S_5^- + D_{\parallel}]\psi_+ = 0$ .

は  $0 < Ma < 2$  のとき  $x_5 = L_5$  に局在する解を1つ持つ。



$L_5$ が有限のとき解にはならないが、そのギャップ=residual質量は指数関数的に小さい<sub>41</sub>

# Shamir domain-wall fermion 行列式

$$\det[aD_{SDW}] = \det \begin{pmatrix} D_{\parallel} & -P_- & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -P_+ & D_{\parallel} & -P_- & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -P_+ & D_{\parallel} & -P_- & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -P_+ & D_{\parallel} \end{pmatrix}$$

欲しいのは edge mode だけ。bulk massive mode を打ち消したいので Pauli-Villars 場 (on anti-periodic lattice) を用意して割り算。

$$\det[aD_{PV}] = \det \begin{pmatrix} D_{\parallel} & -P_- & 0 & 0 & \cdots & P_+ \\ -P_+ & D_{\parallel} & -P_- & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -P_+ & D_{\parallel} & -P_- & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_- & \cdots & \cdots & \cdots & -P_+ & D_{\parallel} \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{\det[aD_{SDW}]}{\det[aD_{PV}]}$$

# 5次元 SDWは実は4次元の理論と等価

$$\frac{\det[aD_{\text{SDW}}]}{\det[aD_{\text{PV}}]} = \det[(D_{\text{PV}})^{-1}D_{\text{SDW}}]$$

いろいろ線形代数を駆使(UDL分解etc.)して変形していくと…

$$= \det \begin{pmatrix} aD_{\text{eff}}^{4\text{D}} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det[aD_{\text{eff}}^{4\text{D}}] \quad \text{up to an numerical const.}$$

$$D_{\text{eff}}^{4\text{D}} = \frac{1}{a} \left[ 1 + \gamma_5 \frac{(1 + H_T)^{L_5/a} - (1 - H_T)^{L_5/a}}{(1 + H_T)^{L_5/a} + (1 - H_T)^{L_5/a}} \right] \quad H_T = \gamma_5 [a(D_W - M)][2 + a(D_W - M)]^{-1}$$
$$T = (1 + H_T)(1 - H_T)^{-1}$$

詳細は青木慎也「格子上の場の理論」付録J および

私の手書きのノート <http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~hfukaya/slides/Fukaya-LatIndex-note.pdf>

# 5次元方向の無限大&連続極限

$$D_{\text{eff}}^{4D} = \frac{1}{a} \left[ 1 + \gamma_5 \frac{(1 + H_T)^{L_5/a} - (1 - H_T)^{L_5/a}}{(1 + H_T)^{L_5/a} + (1 - H_T)^{L_5/a}} \right] \quad H_T = \gamma_5 [a(D_W - M)][2 + a(D_W - M)]^{-1}$$

$L_5 \rightarrow$ 無限大極限で

$$\frac{(1 + H_T)^{L_5/a} - (1 - H_T)^{L_5/a}}{(1 + H_T)^{L_5/a} + (1 - H_T)^{L_5/a}} \rightarrow \text{sgn} H_T = \frac{H_T}{\sqrt{H_T^2}}$$

5次元方向の格子間隔を  $a_5 \rightarrow 0$  とすると、

$$H_T = \gamma_5 [a(D_W - M)][2 + a_5(D_W - M)]^{-1} \rightarrow \gamma_5 [a(D_W - M)]/2$$

通常  $Ma = 1$  にとる。



# Overlap Dirac operator [Neuberger 1998]

$L_5 \rightarrow \infty$  (&  $a_5 \rightarrow 0$  [とらなくてもよい]) 極限で  $\lim_{L_5 \rightarrow \infty} \det \frac{D_{\text{SDW}}}{D_{\text{PV}}} = \det D_{\text{ov}}$

$$D_{\text{ov}} = \frac{1}{a} \left( 1 + \gamma_5 \frac{H_W}{\sqrt{H_W^2}} \right) \quad H_W = \gamma_5 (D_W - 1/a)$$

を得る。これをoverlap Dirac operatorとよぶ。 $H_W$  は**負の質量**を持つ重い Wilson Dirac 演算子。一見まともなDirac演算子には見えないが、

$$H_W = -\frac{1}{a} \gamma_5 (1 - aD_W) \quad \sqrt{H_W^2} = \frac{1}{a} (1 + O(a))$$

を代入してみると、 $D_{\text{ov}} = D_W + O(a)$

なんとこれがGinsparg-Wilson relationを満たす[H<sub>T</sub>のままでもO.K.]

$$D_{\text{ov}} = \frac{1}{a} \left( 1 + \gamma_5 \frac{H_W}{\sqrt{H_W^2}} \right)$$

$$D_{\text{ov}} \gamma_5 + \gamma_5 D_{\text{ov}} = \frac{2\gamma_5}{a} + \frac{H_W}{a\sqrt{H_W^2}} + \frac{\gamma_5 H_W \gamma_5}{a\sqrt{H_W^2}}$$

$$aD_{\text{ov}} \gamma_5 D_{\text{ov}} = \frac{1}{a} \left( 1 + \gamma_5 \frac{H_W}{\sqrt{H_W^2}} \right) \left( \gamma_5 + \frac{H_W}{\sqrt{H_W^2}} \right) = \frac{2\gamma_5}{a} + \frac{H_W}{a\sqrt{H_W^2}} + \frac{\gamma_5 H_W \gamma_5}{a\sqrt{H_W^2}}$$

$$\boxed{D_{\text{ov}} \gamma_5 + \gamma_5 D_{\text{ov}} = aD_{\text{ov}} \gamma_5 D_{\text{ov}}}$$

# 格子上的のカイラル対称性 [Luscher 1998]

オーバーラップフェルミオン作用  $a^4 \sum_x \bar{\psi} D_{ov} \psi(x)$

は以下の“カイラル”変換の下で不変。

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{i\alpha\gamma_5} \quad \psi(x) \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5(1-aD_{ov})} \psi(x)$$

$$\gamma_5 D_{ov} + D_{ov} \gamma_5 = a D_{ov} \gamma_5 D_{ov}.$$

$\gamma_5$  と反可換ではないので  
Nielsen-Ninomiyaは回避。

さらにGinsparg-Wilson 関係式の左右から  $D_{ov}^{-1}$  をかけて座標表示  
にすると、カイラル対称性の破れは同じsiteに集中し  $O(a)$  であることがわかる。

$$D_{ov}^{-1}(x, y) \gamma_5 + \gamma_5 D_{ov}^{-1}(x, y) = a \gamma_5 \delta_{x, y}$$

# オーバーラップ演算子の固有値分布

$$(D_{\text{ov}} - 1/a)^\dagger (D_{\text{ov}} - 1/a) = 1.$$

複素固有値は中心が  $1/a$  にある半径  $1/a$  の円上に並ぶ。

15個のダブルターはすべて  $2/a$  に存在。

Cf. Wilson Dirac operator

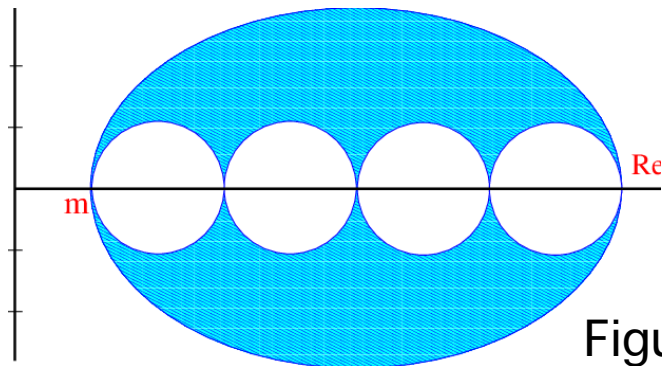
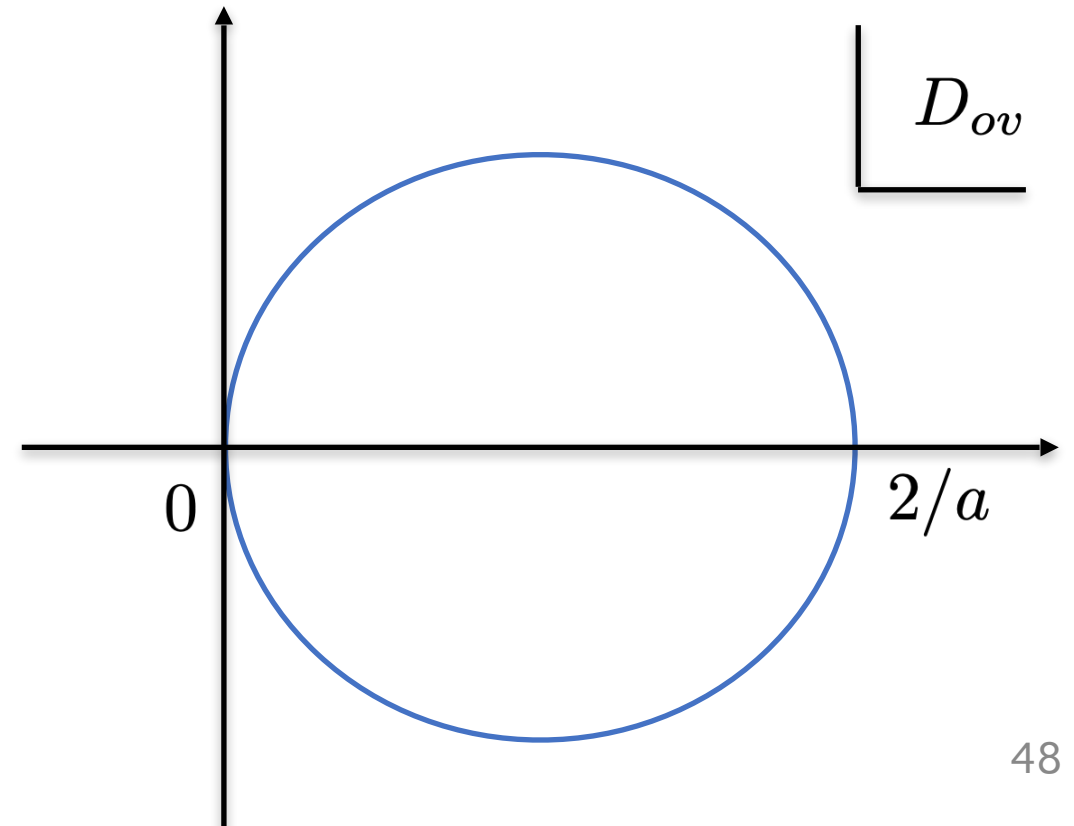


Figure by M. Creutz



# 5. Atiyah-Singer index on the lattice

# 実は破れてほしいカイラル対称性

= カイラル量子異常。

$$D_{\text{ov}} \gamma_5 + \gamma_5 D_{\text{ov}} = a D_{\text{ov}} \gamma_5 D_{\text{ov}}$$

右辺が  $a \rightarrow 0$  でも物理に効いてほしい(Cf. pion の2光子decay)。

\*連続理論ではどうなっているか?[藤川の方法]

$$Z = \int [DA] \int [D\bar{\psi} D\psi] e^{-S_F - S_G}$$

作用は不変。でも積分測度が **Jacobian** を出す。

カイラル変換(連続)

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = \exp(-i\alpha\gamma_5)\psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} \exp(-i\alpha\gamma_5)\end{aligned}$$

の下で作用は不変。でも 積分測度が **Jacobian** を出す。

$$[D\bar{\psi}D\psi] \rightarrow [D\bar{\psi}'D\psi'] \det(e^{2i\alpha\gamma_5})^{\text{reg.}}$$

無限積なので正則化が必要。

ログをとると、

$$\ln \det(e^{2i\alpha\gamma_5}) = 2i\alpha \text{Tr} \gamma_5^{\text{reg.}}$$

Heat-kernelで正則化すると、

$$= 2i\alpha \lim_{M \rightarrow \infty} \text{Tr} \gamma_5 e^{-D^\dagger D/M^2} = 2i\alpha \int_{T^4} FF = 2i\alpha \text{Ind} D$$

要するに、Atiyah-Singer 指数 が L/Rの対称性の破れ=量子異常の帰結として現れた。

# Overlap フェルミオンの量子異常

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)e^{i\alpha\gamma_5} \quad \psi(x) \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5(1-aD_{\text{ov}})}\psi(x)$$

格子理論のJacobian

$$\begin{aligned} [D\bar{\psi}D\psi] &\rightarrow [D\bar{\psi}D\psi] \underline{\det e^{2i\alpha\gamma_5(1-aD_{\text{ov}}/2)}} \\ &= \exp(2i\alpha\text{Tr}\gamma_5(1-aD_{\text{ov}}/2)) \end{aligned}$$

連続理論との整合性が完璧ならば

$$\text{Ind}D_{\text{ov}} = \text{Tr}\Gamma_5 \quad \Gamma_5 = \gamma_5(1-aD_{\text{ov}}/2)$$

のはず。



# Overlap Dirac演算子の指数 [Hasenfratz et al. 1998]

$$\text{Ind}D_{\text{ov}} = \text{Tr}\Gamma_5 \quad \Gamma_5 = \gamma_5(1 - aD_{\text{ov}}/2)$$

Traceを  $H = \gamma_5 D_{\text{ov}}$  の固有関数の完全系で評価する。

Ginsparg-Wilson 関係式より

$$\{H, \Gamma_5\} = \gamma_5(D_{\text{ov}}\gamma_5 + \gamma_5 D_{\text{ov}} - aD_{\text{ov}}\gamma_5 D_{\text{ov}}) = 0$$

が成り立つ。よって任意の固有状態  
に対し、

$$H\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda$$

$$H\Gamma_5\phi_\lambda = -\lambda\Gamma_5\phi_\lambda \quad \text{となるペアが存在し、} \quad (\phi_\lambda, \Gamma_5\phi_\lambda) = 0.$$

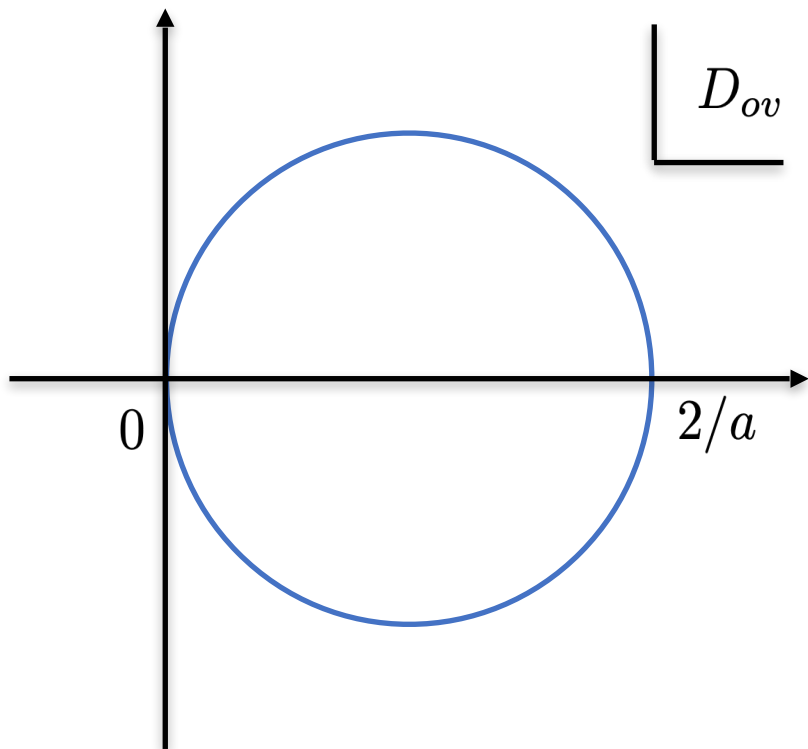
ただし、例外は  $\text{Ker}D_{\text{ov}}, \text{Ker}\Gamma_5$ .  $D_{\text{ov}} = 0$ , or  $D_{\text{ov}} = 2/a$ .

# Overlap Dirac演算子の指数

$$\text{Ind}D_{\text{ov}} = \text{Tr}\Gamma_5$$

$$\Gamma_5 = \gamma_5(1 - aD_{\text{ov}}/2)$$

Traceを  $H = \gamma_5 D_{\text{ov}}$  の固有関数の完全系で評価する。



$$\text{Tr}\Gamma_5 = \text{Tr}_{D_{\text{ov}}=0}\gamma_5 + \sum_{|\lambda|\neq 0, 2/a} (\phi_\lambda, \Gamma_5\phi_\lambda) + \text{Tr}_{D_{\text{ov}}=a/2}\Gamma_5$$

Doublerの寄与が  
うまく消されている。

$$= \text{Ind}D_{\text{ov}}$$

$$= n_+ - n_-$$

# Geometric index との等価性

オーバーラップ演算子のindex

連続理論のindex

$$\text{Ind}D_{\text{ov}} = \text{Tr}\gamma_5 \left( 1 - \frac{aD_{\text{ov}}}{2} \right)$$

$$\text{Ind}D = \lim_{M \rightarrow \infty} \text{Tr}\gamma_5 \exp(D^2/M^2)$$



heat kernel の役割を担っていきそう。

実際、リンク変数を  $U_\mu(x) \sim \exp(iaA_\mu(x))$

とにおいて格子間隔について展開、density を計算してみると、

$$\text{tr} \frac{a\gamma_5 D_{\text{ov}}}{2}(x, x) \sim \frac{1}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}(x) + \mathcal{O}(a)$$

# Topological 不変量?

リンク変数は隣と完全に独立にとれるので、このindexはジャンプしうる=そのままではトポロジカル不変量ではない。

でも plaquetteに滑らかさを要求=admissibility condition:

$$\text{tr}(1 - U_\mu(x)U(x + \hat{\mu})U^\dagger(x + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(x)) < \epsilon$$

すると、十分小さい有限の  $\epsilon$  に対し、indexはジャンプできなくなる=この制限のもとでトポロジカルになる。

[Hernandez et al. 1998]

# Topological (geometric) index

plaquetteに滑らかさを要求=admissibility condition:

$$\text{tr}(1 - U_\mu(x)U(x + \hat{\mu})U^\dagger(x + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(x)) < \epsilon$$

すると、Atiyah-Singer 指数の右辺もトポロジカル不変量として定義できる[Luescher 1982]。

$$n_+ - n_- = \frac{1}{32\pi^2} \int_X d^4x \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr}_c F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}(x)$$

Overlap 演算子のゼロ固有値の数

ゲージ場の巻き付き数

を与えるように単位格子の境界 hypercube上  
に変換関数を一意的に内挿できる。

\* でも等式自体は数学的に未証明。

# ここまでのまとめ

1. 格子理論は有限格子点上のファイバー束の統計力学として定式化される。ゲージ場(接続)-> link 変数。フェルミオン場(切断)-> site変数。
2. Nielsen-Ninomiyaの定理は格子理論のDirac演算子がchirality 演算子( $Z_2$  grading)と反可換になれないことを要求する。=left-rightが混ざってカイラル対称性は必ず壊れる。) 指数定理なんて無理っぽい。[1日目]
3. Domain-wall fermion[Kaplan, 1992]は5次元のトポロジカル絶縁体のメカニズムでleft, rightを5次元方向に引き離し、カイラル対称性を取り戻す。
4. 5次元方向を無限大にとったものの行列式は 4次元のoverlapDirac演算子の行列式と等価。Overlap 演算子はGinsparg-Wilson 関係式を満たす。
5. Overlap 演算子はカイラル対称性およびその量子異常を連続理論と遜色ない形で実現。
6. しかもoverlap Dirac演算子(with なめらかなplaquettes)は指数定理を定式化可能。

スライドURL:

<http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~hfukaya/slides/Fukaya-LatIndex.pdf>

# 補足: 素粒子論のトポロジーは基本的に実空間で議論

素粒子論の並進対称性はフェルミオン&ボゾンの複合系で満たされる。

どちらかだけを見てもまともな運動量空間は定義不可能。

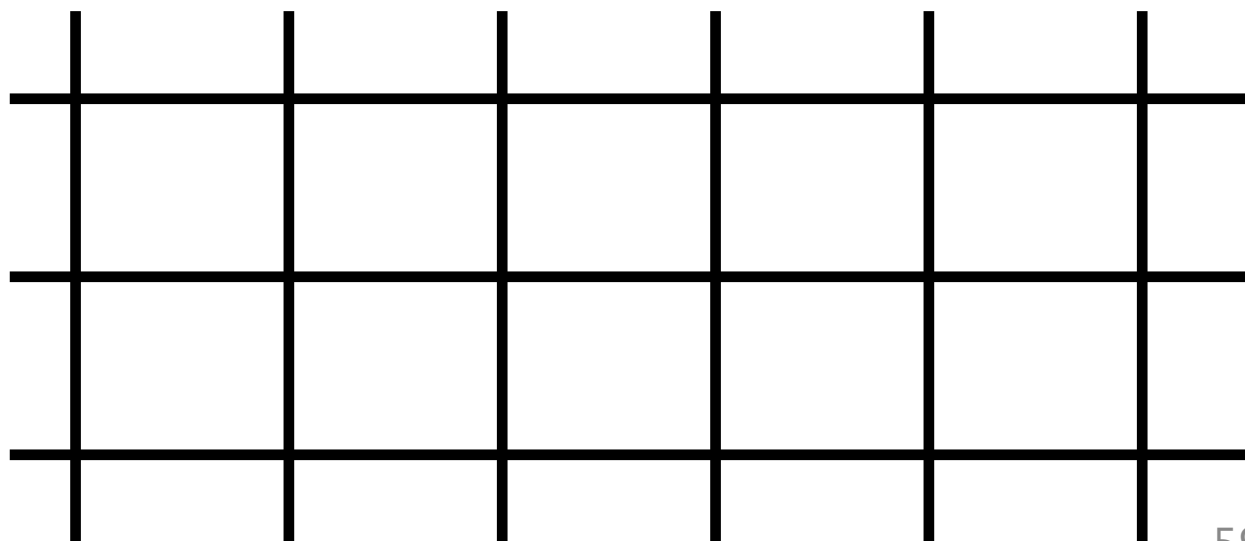
例) 運動量  $p$  の電子と運動量  $q$  の陽電子が対消滅して光子が励起など。

格子ゲージ理論は各リンクにばらばらの電磁場がかかっているようなもの。

domain-wall fermion

= bulk-edge 対応は“運動量”  
が定義できない系でも有効。

$$\bar{\psi} (\gamma^\mu (\partial_\mu + igA_\mu(x))) \psi$$



## 6. Atiyah-Patodi-Singer(APS) index

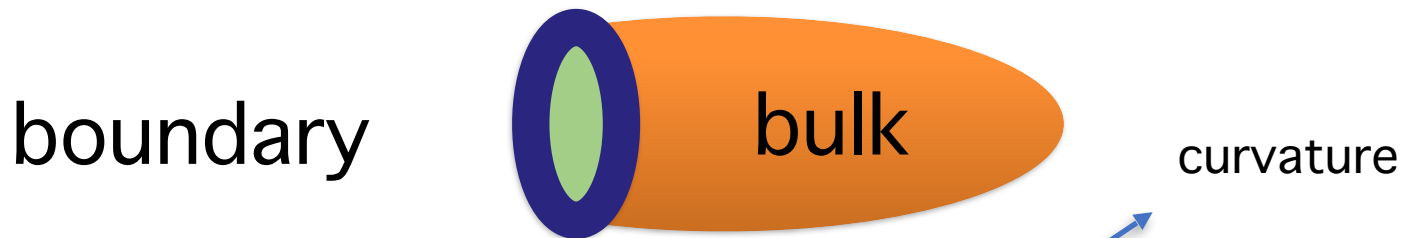
[境界付き多様体上の指数定理] on the lattice

並進対称でないフェルミオン系のbulk-edge対応

[F, Kawai,Matsuki,Mori,Nayakama,Onogi,Yamaguchi, 2019]



# Atiyah-Patodi-Singer指数[1975]とは



$$Ind(D_{APS}) = \frac{1}{32\pi^2} \int_{x_4 > 0} d^4x \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr}[F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}] - \frac{\eta(iD^{3D})}{2} \quad \eta\text{不変量}$$

\* Here we consider 4-d flat Euclidean space with 3-d boundary at  $x_4=0$ .

$$\eta(iD) = \sum_i \text{sgn} \lambda_i$$

$\lambda_i$  : eigenvalue of  $iD$

ただし、**非局所的**なAPS境界条件を課す。

$$D = \gamma_4(\partial_4 + B), \quad B = \gamma_4 \sum_{i=1,2,3} \gamma_i D^i \quad (B + |B|) \phi = 0.$$

APS 指数が4次元bulkと3次元edgeの対応を記述する[Witten 2015]。 61

# Path integral of massless edge fermion

$$Z_{\text{edge}} = \int d\psi d\bar{\psi} \exp \left[ \int_{\text{edge}} \bar{\psi} D \psi \right] \quad D = \sum_{i=1,2,3} \sigma_i (\partial_i + A_i)$$

ランダムなゲージ場

we consider Euclidean space.

$$= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \det \left( \frac{D}{D + \mu} \right) \longrightarrow \text{Pauli-Villars regulator (breaking T symmetry)}$$

$$= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \prod_i \frac{-i\lambda_i}{-i\lambda_i + \mu} \sim \lim_{\mu \rightarrow \infty} \prod_i \frac{-i\lambda_i}{\mu} \propto \exp \left[ -i \frac{\pi}{2} \eta(iD) \right]$$

$\eta$ 不変量

$$\eta(iD) = \sum_i \text{sgn} \lambda_i \quad \lambda_i : \text{eigenvalue of } iD \quad T(\eta(iD)) = -\eta(iD)$$

Edge mode has T anomaly.

# Path integral of massive bulk fermion

$$Z_{\text{bulk}} = \int d\psi d\bar{\psi} \exp \left[ \int_{\text{bulk}} \bar{\psi} (D^{4\text{D}} - M) \psi \right] \quad D^{4\text{D}} = \sum_{\mu=1,2,3,4} \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$$
$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \det \left( \frac{D^{4\text{D}} - M}{D^{4\text{D}} + M} \right) \longrightarrow \text{Pauli-Villars regulator}$$

We can flip the sign of the mass by chiral rotation:

$$-M\bar{\psi}\psi \rightarrow -M\bar{\psi}e^{\frac{i\pi}{2}\gamma_5}e^{\frac{i\pi}{2}\gamma_5}\psi = M\bar{\psi}\psi \quad Z_{\text{bulk}} = 1?$$

# Path integral of massive bulk fermion

No, since the chiral U(1) symmetry has **anomaly**.

$$\begin{aligned} Z_{\text{bulk}} &= \int d\psi d\bar{\psi} \exp \left[ \int_{\text{bulk}} \bar{\psi} (D^{4\text{D}} - M) \psi \right] \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} \exp \left( i\pi \frac{1}{32\pi^2} \int_{\text{bulk}} d^4x F F \right) \exp \left[ \int_{\text{bulk}} \bar{\psi} (D^{4\text{D}} + M) \psi \right] \\ &= \exp \left( i\pi \frac{1}{32\pi^2} \int_{\text{bulk}} d^4x F F \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F F &= \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} [F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}] = d(CS) \quad \text{near boundary} \\ &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

**This is also T-odd.**

# APS index protects T symmetry.

$$Z_{\text{bulk}} Z_{\text{edge}} \propto \exp \left[ i\pi \left( \frac{1}{32\pi^2} \int_{\text{bulk}} d^4x F F - \frac{1}{2} \eta(iD^{3D}|_{\text{edge}}) \right) \right]$$
$$= (-1)^{I_{\text{APS}}}$$

Under T transformation, each phase is odd:

$$FF \rightarrow -FF, \quad \eta(iD^{3D}|_{\text{edge}}) \rightarrow -\eta(iD^{3D}|_{\text{edge}})$$

but  $(-1)^{I_{\text{APS}}} = (-1)^{-I_{\text{APS}}}$  T anomaly is canceled  
between bulk and edge.

“運動量”が定義できなくてもedgeモードの存在がわかる。

[See Dai-Freed 1994, and related works: Metlitski 15, Seiberg-Witten 16, Tachikawa-Yonekura 16&18, Freed-Hopkins 16, Witten 16, Yonekura 16&19, Witten-Yonekura 19...]

# APS指数をそのまま格子理論で扱うのは難しい。

非局所的なAPS境界条件がボトルネック。

$$D = \gamma_4(\partial_4 + B), \quad B = \gamma_4 \sum_{i=1,2,3} \gamma_i D^i \quad (B + |B|) \phi = 0.$$

格子理論では

$$D_{\text{ov}} = \frac{1}{a} \left( 1 + \gamma_5 \frac{H_W}{\sqrt{H_W^2}} \right)$$

1. Overlap Dirac演算子でBをかたんに分離できない。
2. 仮に何かできたとしてもその境界条件はGinsparg-Wilson関係式をやぶる。

[周期、反周期以外あらゆる境界条件がGWを破る。Luescher 2006]

# もう一度格子のAtiyah-Singer 指数をよく見てみる…

$$\begin{aligned} \text{Ind}(D_{ov}) &= \frac{1}{2} \text{Tr} \gamma_5 \left( 1 - \frac{aD_{ov}}{2} \right) & D_{ov} &= \frac{1}{a} \left( 1 + \gamma_5 \frac{H_W}{\sqrt{H_W^2}} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \frac{H_W}{\sqrt{H_W^2}} & &= -\frac{1}{2} \eta(H_W) & H_W &= \gamma_5 (D_W - M) \\ & & & & \eta(H) &= \sum_i \text{sgn} \lambda_i \end{aligned}$$

格子上のindex定理は、

Cf. Itoh-Iwasaki-Yoshie 1982, Adams 2001

1. 指数がmassiveなDirac演算子の $\eta$ 不変量で書けること
2. その定義にカイラル対称性は必要ないこと(Wilson Dirac で十分)を“知っていた”!!

# 連続理論の massive Dirac 演算子再訪

$H(m) = \gamma_5(D + m)$  の固有値を考える。

For  $D\phi = 0$ ,  $H(m)\phi = \gamma_5 m\phi = \underbrace{\pm}_{\text{chirality}} m\phi$ .

For  $D\phi \neq 0$ , any  $H(m)\phi_{\lambda_m} = \lambda_m\phi_{\lambda_m}$  make a pair

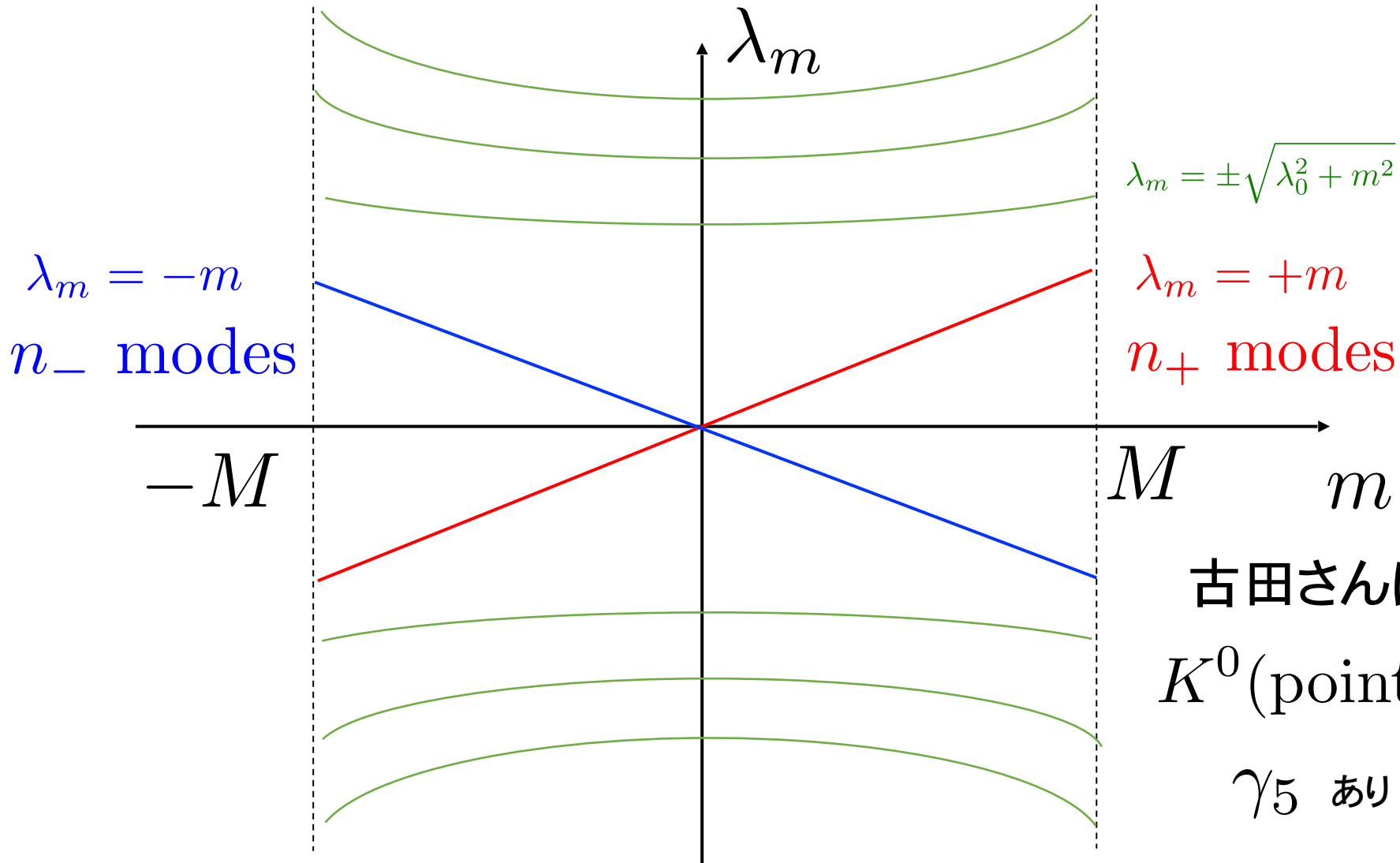
with  $H(m)D\phi_{\lambda_m} = -\lambda_m D\phi_{\lambda_m}$  since  $\{H(m), D\} = 0$ .

Moreover, from  $H(m)^2 = -D^2 + m^2$

we obtain  $\lambda_m = \pm\sqrt{\lambda_0^2 + m^2}$



# AS 指数 = massive Dirac の spectral flow



古田さんに教わったK理論では  
 $K^0(\text{point}) = K^1(\text{line, 端点})$

$\gamma_5$  あり

$\gamma_5$  なし

# $\eta$ 不変量 = index (連続理論)

$n_+$  = number of crossing from negative to positive

$n_-$  = number of crossing from positive to negative

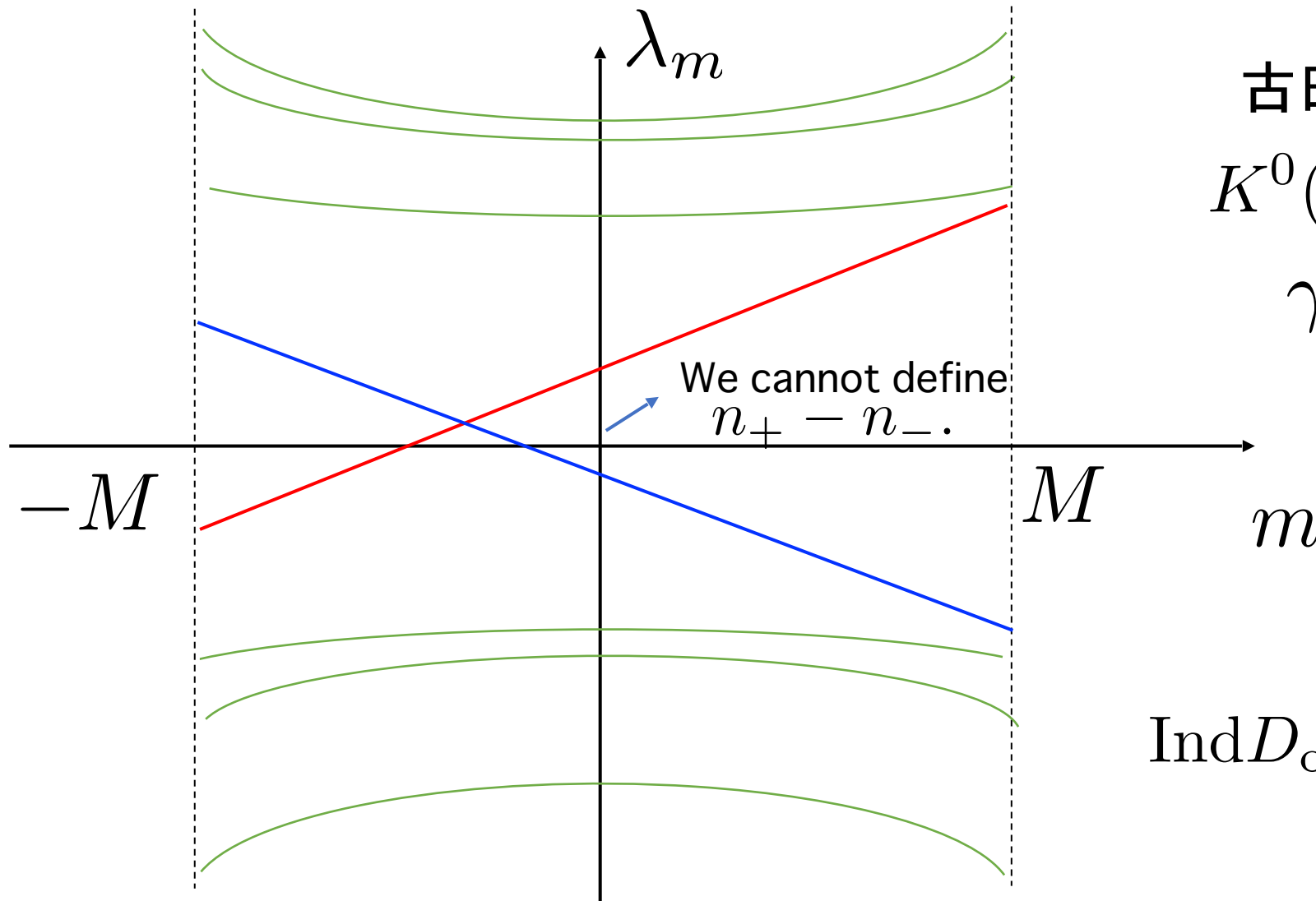
$n_+ - n_-$  = spectral flow of  $H(m)$   $m \in [-M, M]$

On the other hand,  $\eta(H(m))$  increases/decreases by 2 when one eigenvalue cross zero from negative/positive to positive/negative.

$$\rightarrow \text{Ind} D = -\frac{1}{2} \eta(\gamma_5(D - M)) + \frac{1}{2} \eta(\gamma_5(D + M))$$

Topological insulator                      Normal insulator (trivially zero)

Massive (bulk) evaluation is stable against chiral symmetry breaking (on a lattice).



古田さんに教わったK理論では  
 $K^0(\text{point}) = K^1(\text{line, 端点})$

$\gamma_5$  あり

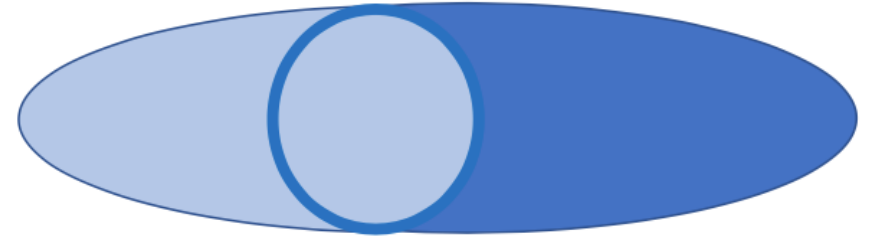
$\gamma_5$  なし



線で数えるほうが  
安定

$$\text{Ind}D_{\text{ov}} = -\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D_W - M))$$

# $\eta$ 不変量=index (連続理論)



物理屋フレンドリーなAPS指数の再定式化

[F-Onogi-Yamaguchi 2017, F-Furuta-Matsuo-Onogi-Yamaguchi-Yamashita 2019]

$$\text{Ind}_{\text{APS}} D = -\frac{1}{2} \eta(\gamma_5(D + M\varepsilon))^{reg.}$$

4次元のdomain-wall fermion

APS指数はmassive Dirac演算子のeta不変量で書き直せる。

ただし、数学的なsetupはもともとのAPSと大きく異なる。

1.  $H_{\text{DW}} = \gamma_5(D + M\varepsilon)$  は境界のない多様体で定義(APS境界条件不要!)
2. 右辺は符号関数が負:  $\varepsilon = -1$  の領域のみのAPS指数を与える。
3. 符号が変わる境目にedge-localized modeが生じる。
4. 全領域で $\varepsilon = -1$  ならば AS indexに帰着。

# Unification of index theorems

## Index with massless Dirac

	continuum	lattice
AS	$\text{Tr} \gamma_5 e^{D^2/M^2}$	$\text{Tr} \gamma_5 (1 - aD_{ov}/2)$
APS	$\text{Tr} \gamma_5 e^{D^2/M^2}$ w/ APS bc	Not known

## Index with **massive** Dirac on a closed manifold

	continuum	lattice
AS	$-\frac{1}{2} \eta(\gamma_5(D - M))$	$-\frac{1}{2} \eta(\gamma_5(D_W - M))$
APS	$-\frac{1}{2} \eta(\gamma_5(D - \varepsilon M))$	$-\frac{1}{2} \eta(\gamma_5(D_W - \varepsilon M))?$

**YES !**

[F, Kawai, Matsuki, Mori, Nakayama, Onogi, Yamaguchi, 2019]

# 格子理論におけるAPS指数

F, Kawai, Matsuki, Mori, Nakayama, Onogi, Yamaguchi, arXiv:1910.09675

On 4-dimensional Euclidean lattice with periodic boundaries ( $T^4$ ), we have shown with  $0 < M < 2/a$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \eta(\gamma_5 (D_W - \varepsilon M)) \quad \varepsilon = \text{sgn}(x_4 - a/2) \text{sgn}(T - x_4 - a/2) \\ & = \frac{1}{32\pi^2} \int_{0 < x_4 < T} d^4x \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr}_c F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}(x) + \frac{1}{2} \eta(iD^{3D})|_{x_4=0} - \frac{1}{2} \eta(iD^{3D})|_{x_4=T} + O(a) \end{aligned}$$

\* Bulk part is similar to that of AS index [H.Suzuki 1998].

Note that LHS is always an integer.

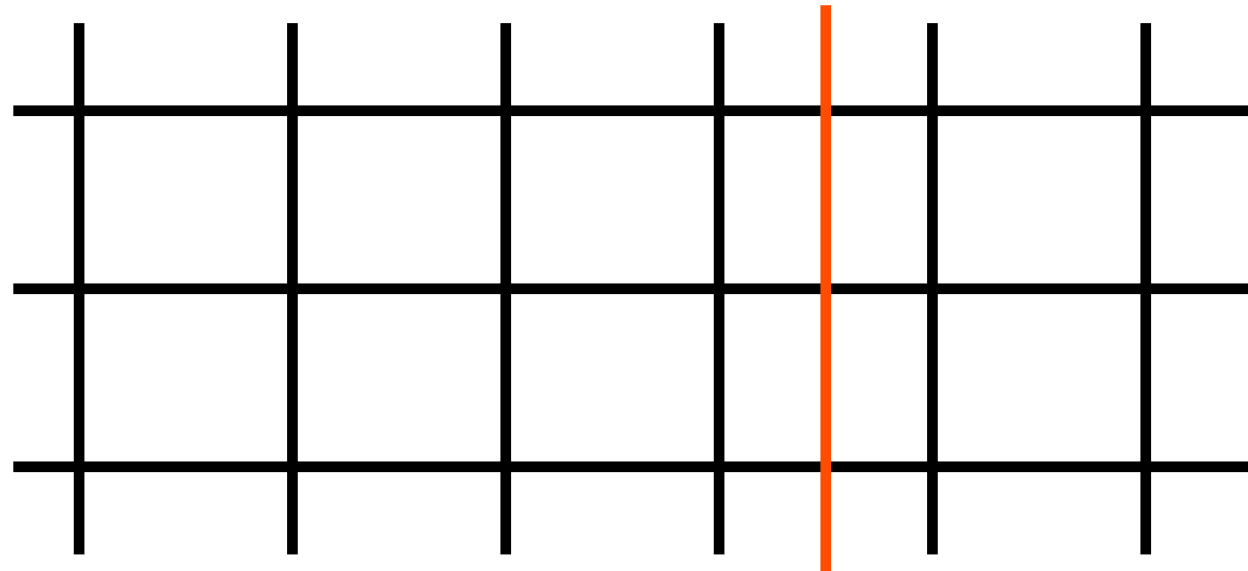
See our paper for the details.

# おまけ: Curved space の指数定理に向けて

[S. Aoki & HF, arXiv:220X.XXXXX]

AS指数定理、APS指数定理、格子理論でも定式化できたが  
ここまではすべて正方格子、domain-wall もまっすぐ。

つまり、flat な時空に限られていた。



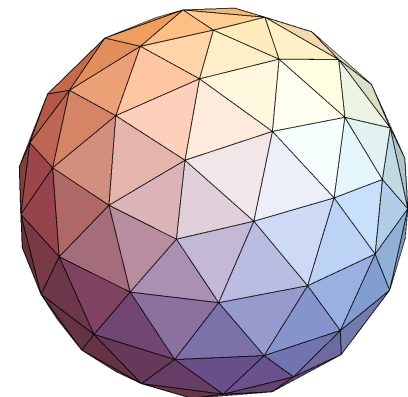
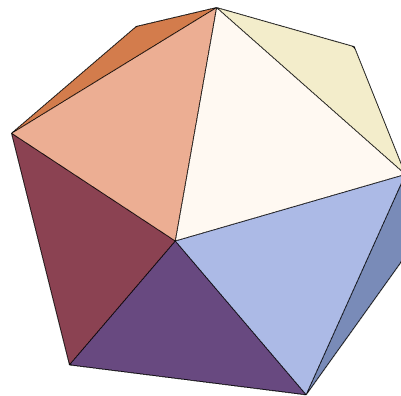
# 先行研究: curved Lattices

[Brower et al. 2016, 2017, Ambjorn et al. 2016, Caterall et al. 2018...]

Curved space は三角格子で扱われてきた

[多様体の三角形分割のイメージ]。

- \* systematicにやるのは難しい [三角形の最小単位(面積、辺、角度、コントロールするべき自由度がたくさん)]
- \* 連続極限も非自明(正方格子では格子間隔  $a$  だけでcontrolできた)
- \* 2D sphere を扱った研究: 回転対称性の破れは自明には回復しない。





# Curved domain-wall fermion

Nash の embedding theorem [1956]: 任意の Riemann 多様体は平坦な時空に等長に埋め込める。

正方格子に曲がった domain-wall を埋め込んだらどうなる？

edge-mode が domain-wall 上に拘束され、その運動は加速運動となる。

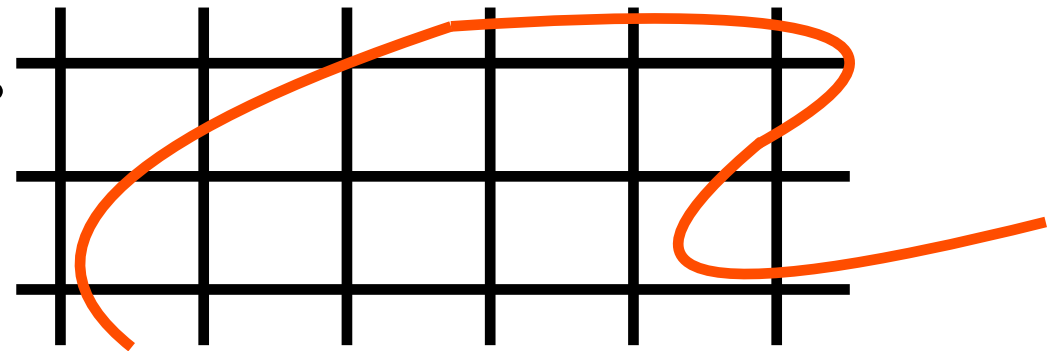
Einstein の等価原理よりこの加速は重力として働くはず

= spin connection が誘導されるはず。

\* 物性理論[ただし連続理論]では topological 絶縁体の curved 表面に“重力”が確認されている。

[Lee 2009, Parente et al. 2011, Imura et al. 2012, Takae et al. 2013...]

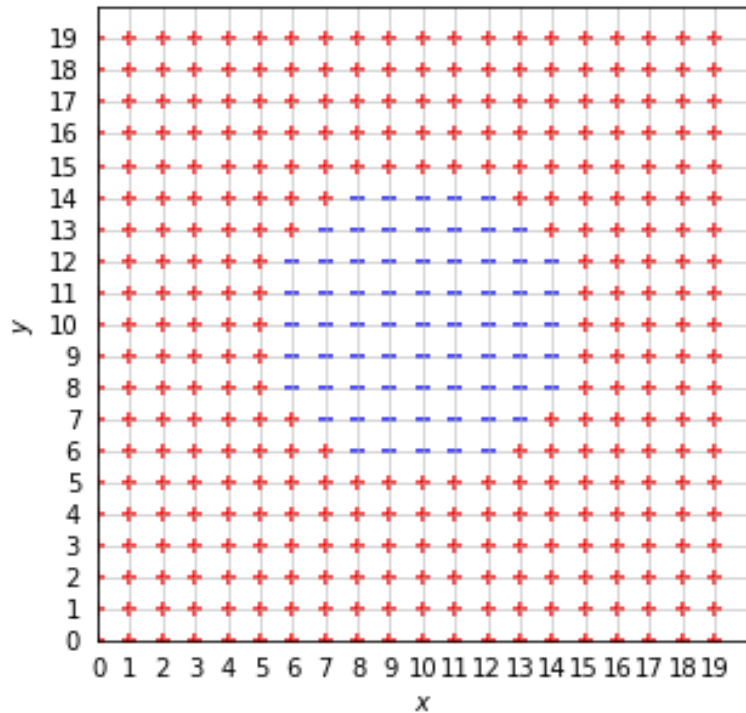
意外と格子ではやられていない。



# 2次元正方格子中の円形 domain-wall fermion

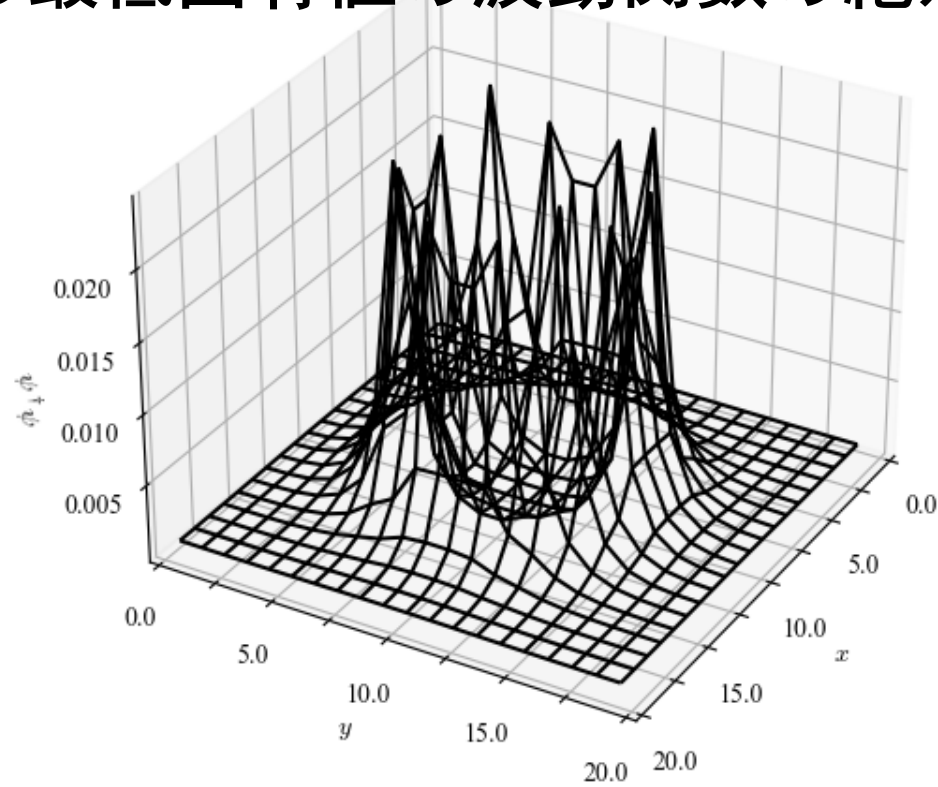
domain-wall の置き方の ambiguity は円とsiteが重なったときの処方くらいしかない[Our choice=重なったら+の質量]。

質量の符号の分布



$$H_{DW} = \sigma_3 (D_W^{2D} - M\varepsilon)$$

の最低固有値の波動関数の絶対値分布



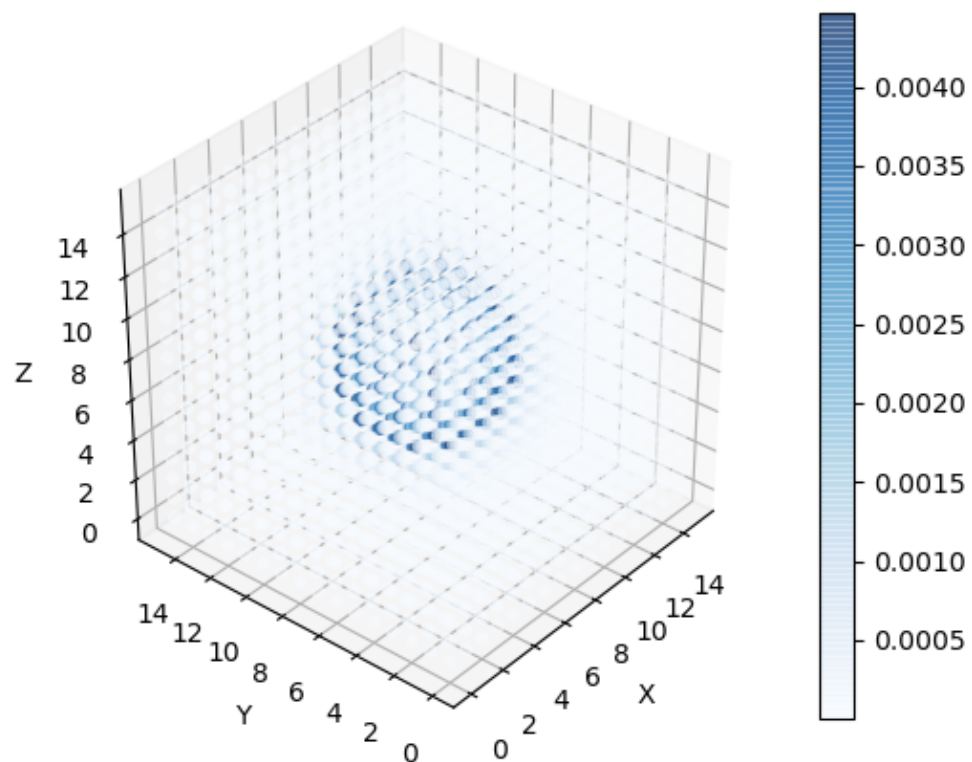
edgeに局在。  
でもガタガタしている。

# 3次元正方格子中の2次元球面domain-wall

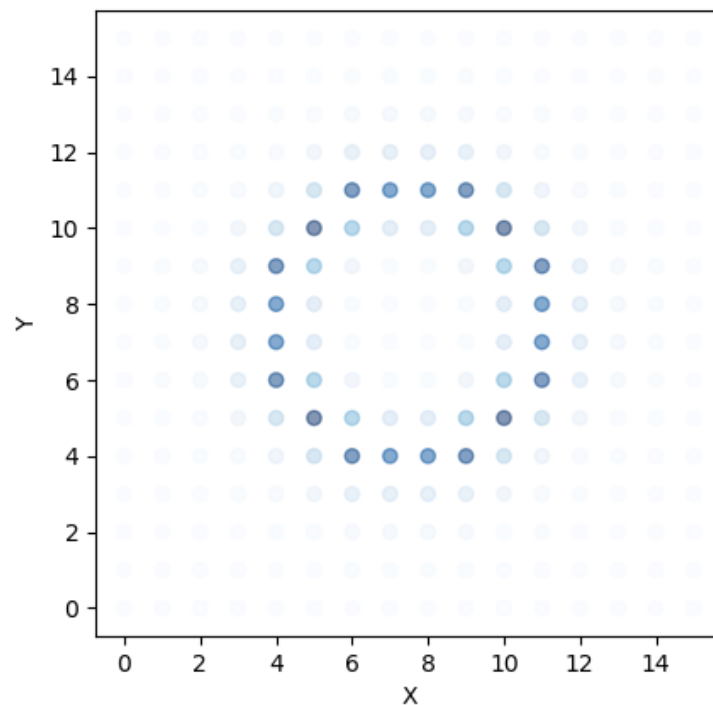
$$H_{\text{DW}} = \sigma_3 \otimes 1 \left( \sigma_1 \otimes D_W^{3\text{D}} - M\varepsilon \right)$$

\* 3D massive Diracは一般にcomplexなので2-flavorに拡張して Hermitian にしている。

の最低固有値の|波動関数|の分布



輪切りにしたもの



# $S^1$ 上の重力場をdetectする方法

1次元の円に拘束された粒子のDirac 演算子 [連続理論]

$$iD_{\text{eff}}^{S^1} = -i \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{1}{2} \right) \quad \text{固有値} \quad E = \pm \frac{2n+1}{2r_0} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$\downarrow$

$r_0$  : domain-wallの半径

重力によるベクトルポテンシャル[Spin-c connection]

重力の効果は固有値のギャップとして現れる。

Cf. 消滅定理[非負の曲率を持つ多様体上でDirac方程式は解を持たない]

# S<sup>2</sup>上の重力場をdetectする方法

2次元の球に拘束された粒子のDirac 演算子 [連続理論]

$$iD_{\text{eff}}^{S^2} = -i \frac{1}{r_0} \left[ \sigma_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma_2 \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + i \frac{1}{2 \sin \theta} - i \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} \sigma_3 \right) \right]$$

$r_0$  : domain-wallの半径

重力によるベクトルポテンシャル[Spin(-c) connection]

固有値

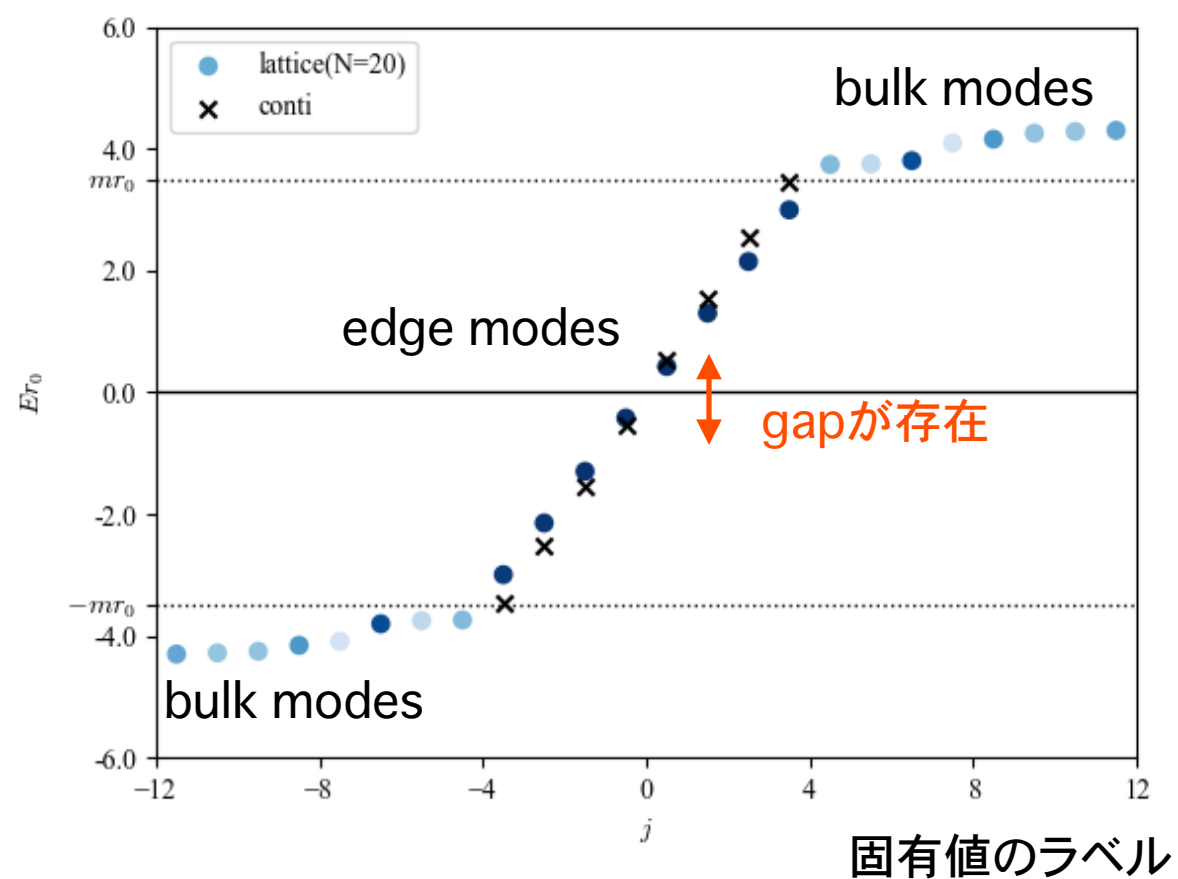
$$E = \pm \frac{n+1}{r_0} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

重力の効果は固有値のギャップとして現れる。

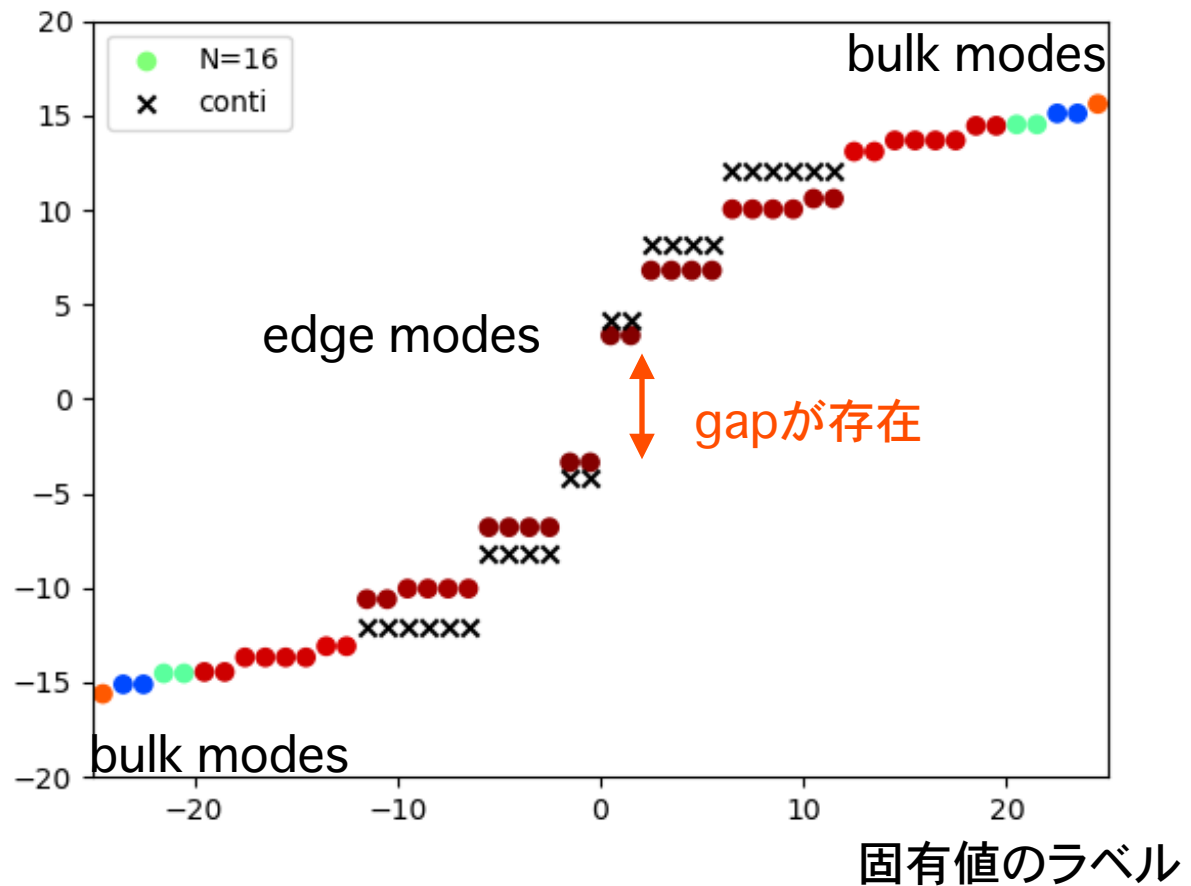
Cf. 消滅定理[非負の曲率を持つ多様体上でDirac方程式は解を持たない]

# 格子domain-wall Dirac 演算子の固有値分布

## S1上の固有値分布



## S2上の固有値分布

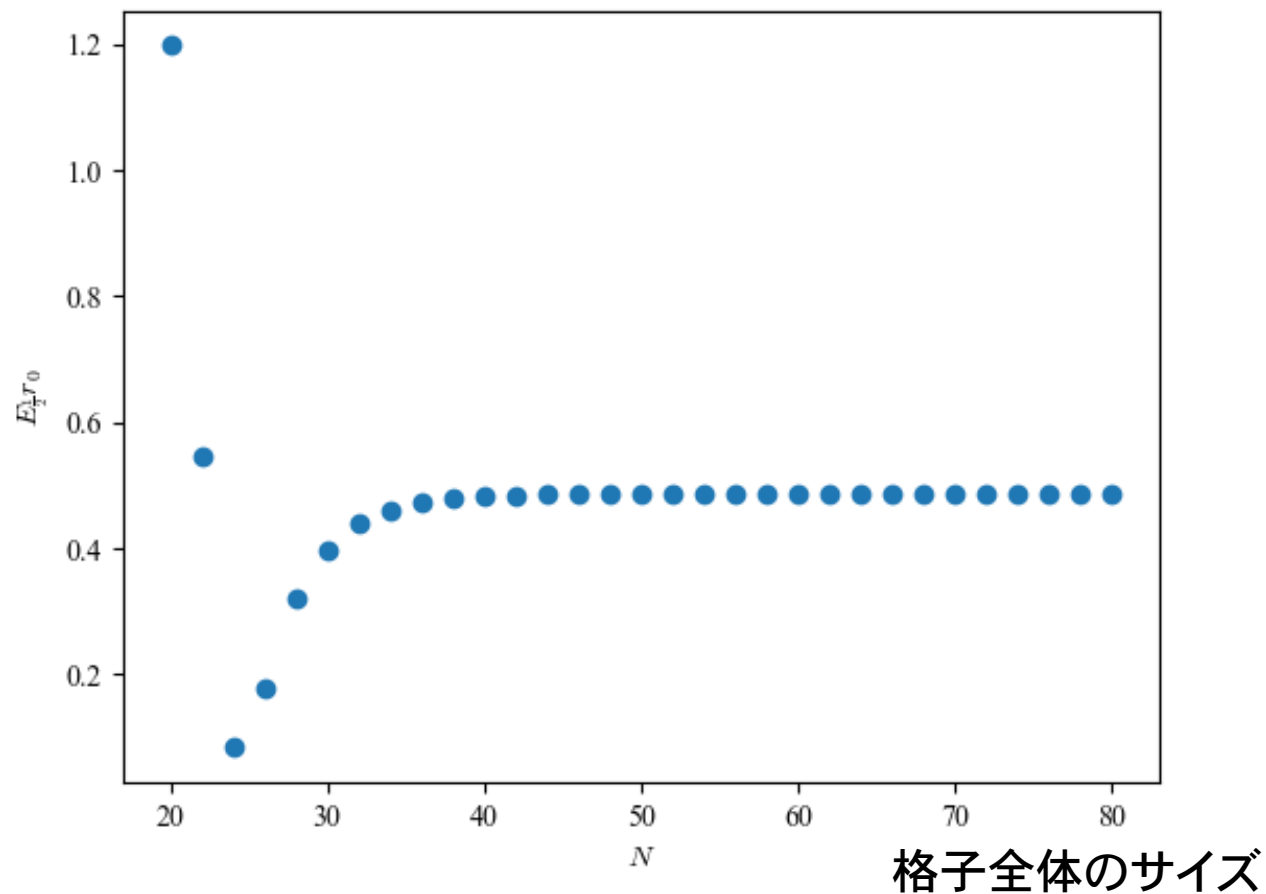
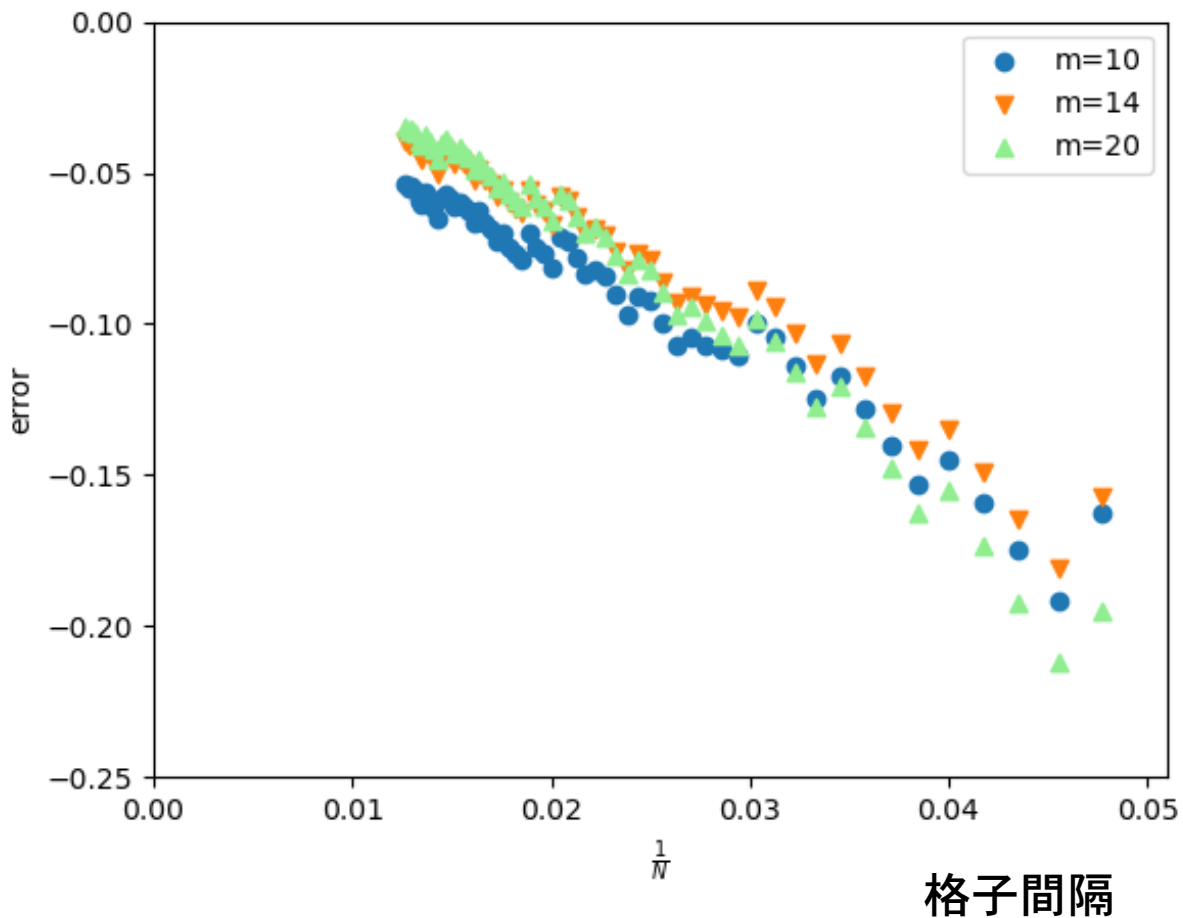


固有値分布は連続理論とよく一致(重力によるギャップも開いている)。

# 連続極限&無限体積極限

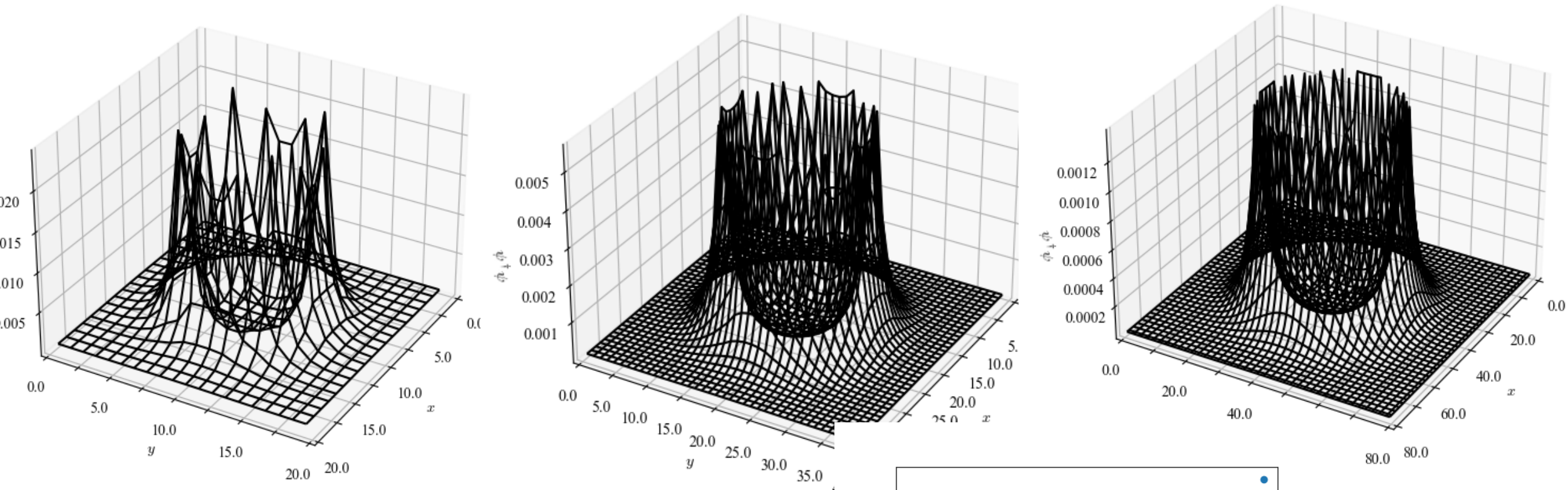
最低固有値の連続理論からのずれ

最低固有値の体積依存性



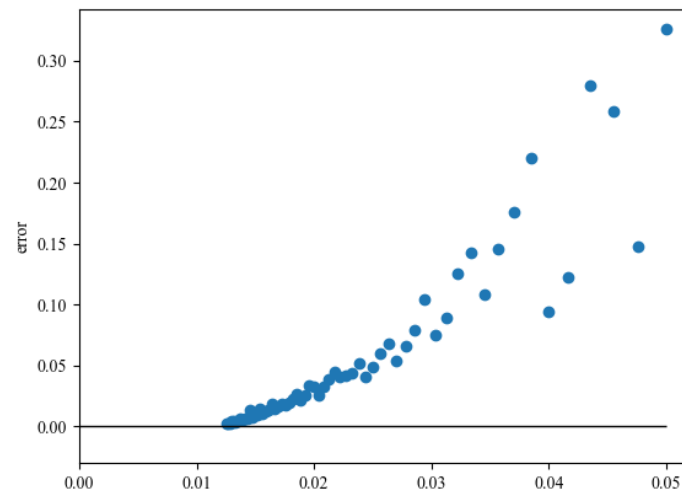


# 回転対称性の回復



mesh を細かくしていくと  
ガタガタがなめらかに。

(\*最低固有状態は軌道角運動量ゼロ)



ガタガタの  
格子間隔依存性



# 付録のまとめ

1. 正方格子に曲がったdomain-wallを埋め込むとエッジモードは重力を感じる。
2. 誘導された重力効果＝固有値のギャップを確認。
3. 単純な連続極限をとるだけでdomain-wallの回転対称性が回復してそう。
4. 指数定理をやるにはゲージ場を入れるなどしてゼロ固有値が存在する系を考える必要がある。
5. 詳細は近日発表の論文を見てください&ぜひ青木匠門くん(阪大)をセミナーに!

# まとめ

1. 格子理論は有限格子点上のファイバー束として定式化される。ゲージ場(接続) $\rightarrow$  リンク変数。
2. 格子上のDirac演算子はカイラル対称性( $Z_2$  grading operator)を失うことを要求される(Nielsen-Ninomiya)。[1日目]
3. ドメインウォールフェルミオンは5次元のトポロジカル絶縁体のエッジ状態としてカイラル対称性を回復。
4. それと等価なオーバーラップフェルミオンのDirac演算子は  
Ginsparg-Wilson関係式によりカイラル対称性とAS指数定理を実現。[2日目]
5. でも実はeta不変量を使えばカイラル対称性を破るWilson Dirac演算子で十分。
6. Wilson Dirac演算子とdomain-wall 質量を使えばAPS指数を定式化可能。
7. domain-wall を曲げるのは簡単なので curved spaceも扱える。

# 今後の展望

Index with **massive** Dirac on a closed manifold

	continuum	lattice
AS	$-\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D - M))$	$-\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D_W - M))$
APS	$-\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D - \varepsilon M))$	$-\frac{1}{2}\eta(\gamma_5(D_W - \varepsilon M))$

格子理論への応用は正方格子( $T^4$ )のみ。数学的な検証も不十分。

数学的な定式化: F-Furuta-Matuo-Onogi-Yamaguchi-Yamashita, in progress.

Cf. Yamashita 2020, Kubota 2020

87

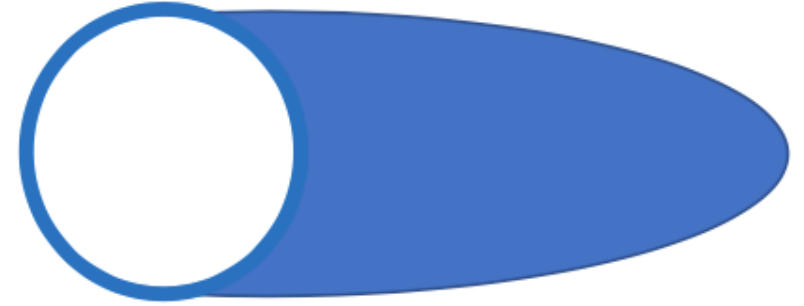
Curved domain-wall Dirac 演算子 : Aoki-F, in progress

# 本講演の目標

1. 数学のみなさんに 離散化された格子上の場の理論 (有限次元ベクトル空間) でも index が定義できることに驚いていただく。
2. 物性のみなさんに 格子ゲージ理論で質量ゼロのフェルミオンを扱うにはトポロジカル絶縁体とそっくりな構造を使うほかないことを理解いただく。「この世は5次元トポロジカル絶縁体の4次元エッジ状態かもしれない」
3. 素粒子、原子核理論のみなさんに「domain-wall fermion すごい!」の再確認。

But the index itself is physicist-unfriendly.

$$I_{\text{APS}} = n_+ - n_-$$

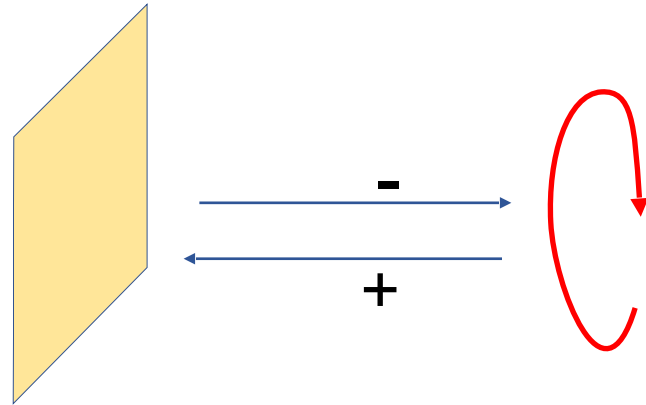


$n_{\pm}$  : number of solutions w/  $\pm$  chirality  
of **massless** Dirac equation  $D_X^{4D} \psi = 0$   
with a **non-local boundary** condition on the  
edge.

But topological insulator is **massive(gapped)** and  
described by a **local field theory**...

# Difficulty with boundary

If we impose **local** and **Lorentz (rotation)** invariant boundary condition, + and – chirality sectors do not decouple any more.



For reflecting particle,  
momentum flips, but  
angular momentum does not  
→ **chirality flips**.

$n_+, n_-$  and the index do not make sense.

# Atiyah-Patodi-Singer boundary condition

[Atiyah, Patodi, Singer 75]

gives up the **locality and rotational symmetry** to keep the **chirality**.

Eg. 4 dim  $x^4 \geq 0$   $A_4 = 0$  gauge

$$D = \gamma^4 \partial_4 + \gamma^i D_i = \gamma^4 (\partial_4 + \underbrace{\gamma^4 \gamma^i D_i}_A)$$

They impose a **non-local** b.c.  $A$

$$(A + |A|)\psi|_{x^4=0} = 0$$

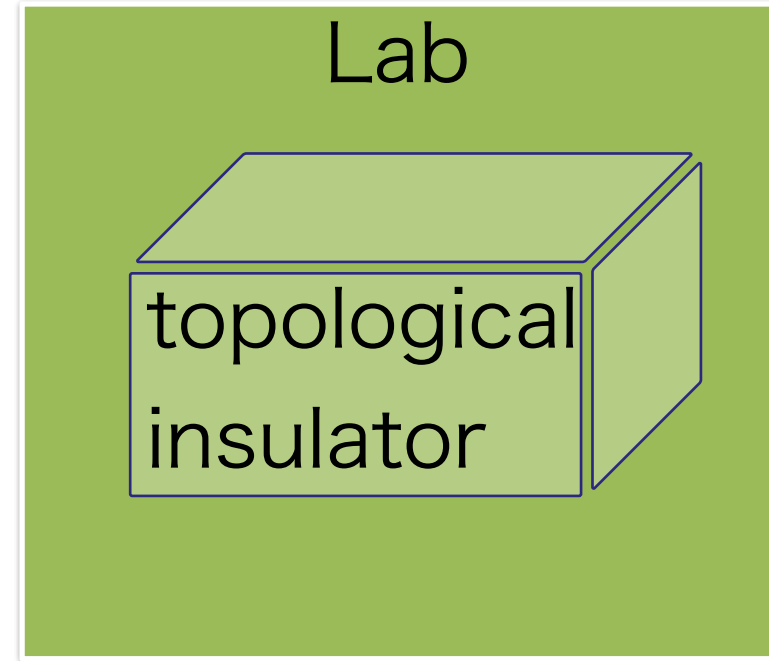
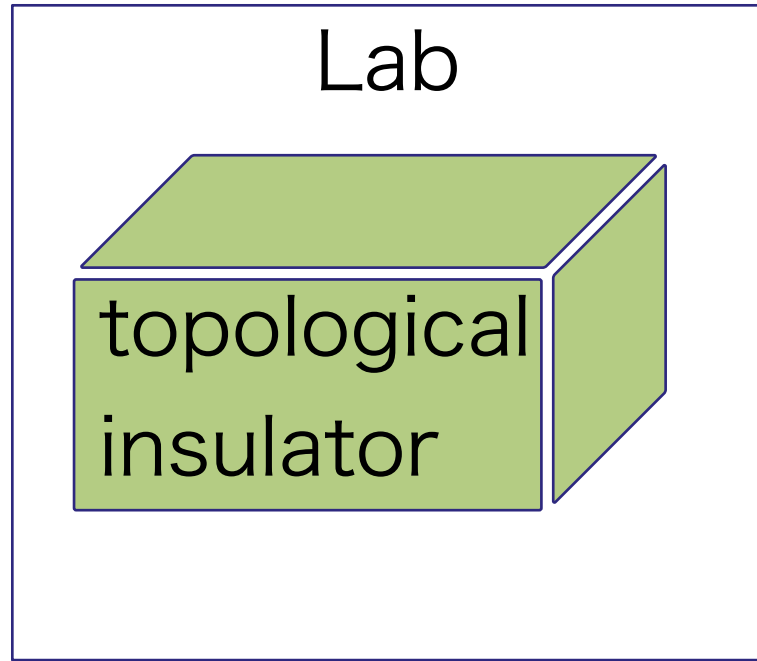


⇒ index =  $n_+ - n_-$

Mathematically beautiful!

But physicist-unfriendly.

# More physical set-up?



Topological insulator is nontrivial because its outside (our lab) is made of normal insulator.