質量の起源

東島 清
大阪大学・大学院理学研究科

1　初めに

この宇宙を造っている究極の物質は何だろう，という素朴な疑問を持つ人は多い．宇宙はどのようにして誕生したのだろう，宇宙の果ては一体どうなっているのだろう，最初の生命はどうやってうまれたのだろう，という疑問とともに人類にとっての永遠の謎かも知れない．このうち初めの２つが素粒子物理学が追求する問題であるが，宇宙の誕生について答えるにはまだまだ時間がかかりそうである．一方，究極の物質に迫る鍵がこの 5〜6 年で得られそうである．驚くことに究極の物質はもともと質量を持たないことが分かってきた．質量を持たない粒子が，真空に潜むヒッグス粒子との相互作用により質量を獲得すると考えないと，つじつまが合わないのである．このすべての物質の質量の起源であるヒッグス粒子の探索に向けて，日米欧の高エネルギー物理学者たちが全力を挙げて取り組んでいる．

我々の素朴な疑問に端を発した物理学は，技術の進歩に支えられて進歩してきた．物理学の発展を振り返ると，単に我々の知識が豊かになったというだけにとどまらず，時に常識ではどうしても理解できないような世界観の変革を迫られてきたことがわかる．自然界を支配する法則は，日常生活に基づく常識を遙かに越えており，想像力を大きく広げなければ理解しがたい．技術の発展により目に見えないミクロの世界の様子が明らかになり，新たに発見された相対性理論と量子力学は我々の自然観に大きな変更をもたらした．これから説明しようとする素粒子の世界の言葉は，この相対性理論と量子力学を基にした場の量子論と呼ばれる法則である．この言葉を使わずにヒッグス粒子などの素粒子物理学を説明するのは非常に難しい．本稿は素粒子物理学を理解するのに必要な基礎知識を提供するために，簡単化された模型を例にとって説明する．第２章は，このミクロ世界の常識である場の量子論への入門である．既に場の量子論を学んでいる読者は第３章から読み始めていただきたい．

2　場の量子論

場の量子論は相対性理論と量子力学を融合したもので，力と波と粒子を統一した理論である．大学初年次の数学だけを仮定して必要な知識を説明する．

2.1　相対性理論

道端に止まっている人から見て時速 60 km/s で走る自動車も，同じ道路を時速 5 6 km で走る別の車から見ると，時速 4 km でのろのろ走るように見える．物体の速さは見る人の速さに依るというのが日常生活の常識である．ところが，光の場合はこの常識が成り立たない．光の速さは道端に止まっている人から見ても，車で光を追いかける人にとっても一定である．納得できない人は自分で光の速さを測ってみるしかない．ランプで光の速さを測ろうとしたガリレオの時代には難しかったが，現代ではレーザー光源が簡単に

手に入る．パルス状の光を出すレーザー光源と鏡とオシロスコープがあれば小数点２桁程度の精度で簡単にはかることができるそうである． 速さは物体が走った距離を走るのに要した時間で割ったものであるから，光の速さが一定ということは，時間と距離が独立ではないということを意味する．このため 1983 年に長さの単位を定めるメートル原器は廃止され，光速度 299,792,458 m/s を不変な定数と定めて，メートルが再定義された．

相対性理論では光の速さが一定になるように理論がつくられる．道端に佇む人のいる場所を原点にとり，時刻 t=0 に四方八方に光を出せば時刻 t には光は半径 ct の球面上の点に達している．光の届いている場所の座標を $\vec{x}=(x,y,z)$ とすれば，原点からの距離は $|\vec{x}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ で与えられるので，$x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = 0$ が光の波面を決める式である．同じように，一定の速度で走る車に乗った人から見た位置座標と時間を $\vec{x}\,'=(x',y',z')$, t' とすると，時刻 t' における光の波面は $x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0$ で定められる（車が道端の人のそばを通り過ぎる時刻を $t=t'=0$ とし，そのときの座標の原点が一致するように定義しておく）．二人の見た座標を関係づける線形変換が

$$c^2t^2-\vec{x}^{\,2}=c^2t'^2-\vec{x}'^{\,2} \tag{1}$$

を満たしていれば，両者がともに光速は c であると主張しても矛盾はしない．この関係式を満たす変換を**ローレンツ変換**と呼ぶ．光速を不変にするため，空間座標と時間は独立でなくなり，互いに混じり合ってしまう．そこで，この $(x^0=ct, x^1=x, x^2=y, x^3=z)$ ４つをまとめて**４元ベクトル**と呼び，$x^\mu=(ct,x,y,z)$ と書く．両辺に現れている量を，4 次元距離の自乗（あるいは４元ベクトルの長さの２乗）という．ユークリッド空間と異なり，距離の定義に負号が入るが，このような空間をミンコフスキー空間と呼ぶ．ミンコフスキー空間における二つの 4 元ベクトル $A^\mu=(A^0,\vec{A})=(A^0,A^1,A^2,A^3)$ と $B^\mu=(B^0,\vec{B})=(B^0.B^1,B^2,B^3)$ の内積は

$$A\cdot B=A_\mu B^\mu=A^0B^0-\vec{A}\cdot\vec{B} \tag{2}$$

で定義される．ここで $A_\mu=(A^0,-A^1,-A^2,-A^3)$ とし，**繰り返した添え字** μ **については** 0 **から** 3 **迄の和をとる**約束をしておく[1]．

ニュートンの力学ではエネルギー E と運動量 $\vec{p}$ は別々のものであるが，相対性理論では１つの 4 元ベクトルの時間成分と空間成分にまとめられる: $p^\mu=(E/c,\vec{p})$．ニュートンの場合運動量は質量 m に物体の速度 $\vec{v}=d\vec{x}/dt$ を掛けたものであるが，相対性理論では dt はもはや不変なものでなくなり座標系に依存してしまう．座標系に依存しない時間は，ローレンツ変換に不変な距離の自乗を用いて定義すればよい

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{1}{c}\sqrt{(cdt)^2-(d\vec{x})^2} \\ &= dt\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}. \end{aligned} \tag{3}$$

これは物体と一緒に動く座標系における時間を表すので**固有時**と呼ばれる．4 元運動量は固有時を用いて次のように定義される

$$\begin{aligned} p^\mu &= m\frac{dx^\mu}{d\tau} \\ &= \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}},\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

[1] ４元ベクトルの内積を逆符号で定義することもある

この相対論的なエネルギーを $(\vec{v})^2 << c^2$ の場合に展開すると

$$\begin{aligned} E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \\ &\approx mc^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \cdots . \end{aligned} \tag{5}$$

右辺第２項はニュートン力学の運動エネルギーに対応し，第１項が有名なアインシュタインの静止エネルギーを表している．素粒子物理学ではヒッグス粒子のような未知の素粒子をつくるために，この質量とエネルギーの等価性が用いられる．粒子加速器で大きなエネルギーを作り出し，そのエネルギーを質量に転換することにより，重い新粒子を探しているのである．

相対性理論ではエネルギーと運動量は４元ベクトルであり，その長さの自乗はローレンツ変換に不変な質量である．実際，(4) の長さの自乗をつくれば，相対論的な**エネルギーと運動量の関係**が得られる

$$\frac{1}{c^2}E^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2. \tag{6}$$

この式をエネルギーについて解くと

$$E = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}, \quad (m \neq 0) \tag{7}$$

$$ = c|\vec{p}| \qquad\qquad (m = 0) \tag{8}$$

となるが，これを式 (4) と組み合わせると粒子の速さが得られる

$$|\vec{v}| = \frac{c^2|\vec{p}|}{E} = \frac{c|\vec{p}|}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}} \leq c$$

が，等号が成りたつのは質量がゼロの時だけである．相対性理論で光が特別な役割を演じるのは，光子の質量がゼロだからである．

2.2 量子力学

ミクロの世界を理解するには，もう一つ日常の経験を越えなければならないことがある．我々の経験によると，物体が何時何分にどこの場所にいるかを知るだけでは，物体の運動を予測することはできない．そのときにどの方向にどんな速さで動いているかを知らなければならない．すなわち，物体の位置と運動量を両方とも測定すれば，物体の運動状態を知ることができる．また当然ながら位置も運動量も同時に幾らでも精密に測定できると考えている．ミクロの世界では，この常識が成り立たない．物体の位置と運動量は同時には決まった値を持ち得ない．つまり量子力学的な粒子像には制限がある．物体の位置と運動量を決定する精度をそれぞれ Δx, Δp とすれば，この積をプランク定数より小さくできないという主張

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h \tag{9}$$

が有名なハイゼンベルグの**不確定性原理**である．この式は，どんな状態においても，座標や運動量が平均値のまわりで揺らいでいることを示している．

我々の経験では粒子と波は全く別物である．粒子は質量が一点に集まっていて，エネルギーと運動量を持って運動する．これに対して波は空間的に拡がっており，振動数 ν と

波長 λ と波の振幅によって特徴づけられる．波の特徴としては，うなりなどの干渉がある．水面に浮かぶ油の膜が色づいて見えるように，光も干渉する．このことから光は波と考えられてきたが，光電効果を説明するために，アインシュタインは光も粒子としての性質を持つという光量子説を唱えた．これに刺激されて，ド・ブロイは電子も波としての性質を持つと考えた．このアインシュタインとド・ブロイの説では粒子を記述する言葉であるエネルギー・運動量と，波を特徴づける量である振動数・波長が

$$E = h\nu \tag{10}$$
$$|\vec{p}| = \frac{h}{\lambda} \tag{11}$$

という関係式で結びついている．左辺が粒子を表す量であり，右辺が波を表す量である．ニュートン力学では粒子の状態は位置と運動量で表されたが，量子力学では位置と運動量を同時に精密に決定することができない．かわりに粒子の状態は波動関数で表される．例えば１次元の運動を考えると，運動量が一定の値 p を持つ平面波[2]

$$e^{\frac{2\pi i}{h}(px-Et)}$$

は無限に広がっており，どこに粒子があるのか全く分からない．この平面波をいろいろな運動量について重ね合わせて波動関数

$$\psi(x,t) = \int f(p) e^{\frac{2\pi i}{h}(px-Et)} dp$$

を作れば，空間的に狭い範囲に局在した波を作ることができる．Δx を小さくするのに払った代償として，Δp が大きくなってしまうというのが不確定性原理 (9) の主張するところである．

波の進行方向の単位ベクトルを $\vec{n}$ として，その方向を向いた波数ベクトル $\vec{k}$ と角振動数 ω を

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n} \\ \omega &= 2\pi\nu \end{aligned} \tag{12}$$

で定義すると，**アインシュタインとド・ブロイの関係**は次のように書き換えられる．

$$\begin{aligned} E &= \hbar\omega \qquad (\hbar = \frac{h}{2\pi}) \\ \vec{p} &= \hbar\vec{k}. \end{aligned} \tag{13}$$

角振動数は単位時間に波の位相が何ラジアン進むかを表し，波数 $|\vec{k}|$ は単位長さあたり位相がどれだけ進むかを示す．

波にも平面波，球面波，その重ね合わせなどいろいろ複雑な波があるが，その運動は波動方程式によって定められる．光の波動方程式はいわゆるマクスウェル方程式から導かれる．電場または磁場を $\phi(x) = \phi(\vec{x}, t)$ と書くことにすると，電磁場のマクスウェル方程式は

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x) = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \phi = 0 \tag{14}$$

[2] 虚変数の指数関数は $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ で定義される．この表現を用いると，微分が $\frac{de^{i\theta}}{d\theta} = ie^{i\theta}$ となり非常に簡単である．

となる．ただし，x^0, x^1, x^2, x^3 のそれぞれの方向への変化率を表す偏微分演算子を

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \\ \vec{\nabla} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \end{aligned} \tag{15}$$

と定義している．振幅 a，波数 $\vec{k}$，角振動数 ω の平面波は (12) より

$$\begin{aligned} \phi_{\vec{p}}(\vec{x}, t) &= a\ e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \\ &= a\ e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)} \end{aligned} \tag{16}$$

となる．２行目ではアインシュタインとド・ブロイの関係 (13) を用いて粒子の言葉で表した．(16) を電磁場の波動方程式 (14) に代入すれば

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = 0$$

が得られる．式 (6) と比べると，粒子描像で見たとき光子の質量がゼロであることを示していることが分かる．

次に質量を持った粒子の波動方程式を求めよう．今度は粒子描像を先に知って，波の描像を求めるわけだから，電磁場の場合を逆にたどればよい．波動方程式の平面波の解は粒子描像ではエネルギーと運動量の関係式 (6) を与えなければならない．平面波 (16) を時間で微分するとエネルギーになり，空間座標で微分すると運動量になる

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\phi_{\vec{p}}(x)}{\partial t} &= E\phi_{\vec{p}}(x) \\ -i\hbar\vec{\nabla}\phi_{\vec{p}}(x) &= \vec{p}\phi_{\vec{p}}(x) \end{aligned} \tag{17}$$

ことに注意すれば，(6) を導く波動方程式は

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\phi(x) = 0 \tag{18}$$

であることが分かる．波動方程式を導くのに平面波を用いたが，得られた波動方程式は平面波を重ね合わせたもっと一般的な解を持っている．

この方程式は**クライン・ゴルドン方程式**と呼ばれるが，実際には上に述べた論法でシュレディンガーが先に導いていた．シュレディンガーは電子に対する波動方程式を求めようとしたのだが，得られた相対論的な方程式を使って水素原子のエネルギー準位を求めると，全く実験値と合わなかった．まず非相対論の近似をした後で上の論法を使うと有名なシュレディンガー方程式が出てきて，実験結果に一致する．正しいはずの相対性理論よりも，近似に過ぎない非相対論的な波動方程式の方が実験に合うのは不思議だが，後にクライン・ゴルドン方程式はスピンを持たない粒子（**スカラー粒子**）に対する正しい方程式であることがわかった．後にスピンを持つ電子に対するディラック方程式が発見されて，相対論的な波動方程式の正しさが示された．

スピンはニュートンの力学では回転するコマの角運動量 $\vec{J}$ に対応しているが，量子力学ではとびとびの値をとるようになる．量子力学は $|\vec{J}|/\hbar \to \infty$ の時にニュートン力学に帰着するので，その場合にはスピンをコマの描像で考えて良いが，$|\vec{J}|$ が小さいときには量子力学的に考えなければならない．量子力学ではスピンの大きさは $\hbar$ の整数倍か半整数倍に限られる．スピンが $\hbar$ の整数倍の粒子をボーズ粒子あるいは**ボゾン**と呼び，半整数倍の粒子をフェルミ・ディラック粒子あるいは**フェルミオン**という．

2.3 場の理論

相対性理論ではどんな信号も光の速さよりも早く伝わることはないので，遠く隔たった２つの物体の間に瞬間的に力が働くことはあり得ない．すべての力は場によって媒介される近接作用でなければならない．空間の各点各点にはその点の物理的状態を表す場

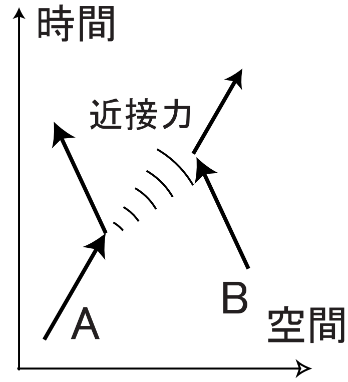

図 1: 力は場によって伝えられる

が存在する．原点に電荷をおいたとしよう．電荷によってまわりの空間の電気的性質が変化するため，別の電荷を持ってくるとその点の場の状態に応じて力を受ける．原点においた電荷を静止させておけば，まわりの場も静的な場となり，そこに別の電荷をおくとクーロンの力を受ける．原点の電荷を振動させると，まわりの場も時間とともに振動する．その振動が隣の点の場を変化させ次々に振動が伝わって行く．こうして，場自身の固有の運動である波は光速以下の速度で時間・空間を伝わって行く．つまり，相対性理論では，力は場でなければならず，変化する場は波となって空間を伝わってゆく．

一方，量子論ではすべての物質は波と粒子の両方の性質を持っている．空間の各点に実在する場を力学変数と見なして，量子力学を適用する方法を**場の量子論**という．量子力学では力学変数は演算子として扱われるので，場の量子論では場 $\phi(\vec{x}, t)$ は演算子となる．クライン・ゴルドン方程式に従う複素スカラー場の場合，平面波 (16) を重ね合わせて任意の波を

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(b_{\vec{p}} e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} + d^\dagger_{\vec{p}} e^{\frac{i}{\hbar}p\cdot x} \right) \\
\phi^\dagger(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(d_{\vec{p}} e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x} + b^\dagger_{\vec{p}} e^{\frac{i}{\hbar}p\cdot x} \right) \qquad (19)
\end{aligned}
$$

と表した時，係数 $b_{\vec{p}}$, $d_{\vec{p}}$ はそれぞれ粒子と反粒子を消す演算子を，$b^\dagger_{\vec{p}}$, $d^\dagger_{\vec{p}}$ は創る演算子を表す．

真空は粒子も反粒子もない状態であるが，場は演算子であるためどんな状態においても，平均値のまわりに絶え間なく揺らいでいる．このため粒子が何もないはずの真空においてさえ，場の揺らぎが存在する．励起状態にある原子がひとりでに光を出してエネルギーの低い状態に落ちてゆくのは，この真空における電磁場の揺らぎのためである．場の量子論の真空は決して空っぽではないのである．

クライン・ゴルドン方程式は線形の方程式であり，重ね合わせの原理が成り立ち，波が衝突してもすり抜けるだけである．実際には波が衝突すると新たな波が生ずる．これ

は波と波の相互作用があるからである．例えば

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\phi(x) = -2\lambda \phi^\dagger \phi^2(x) \tag{20}$$

のように場について 3 次の項が入ると，波の衝突により新たな波が生ずる．これは粒子描像を用いると，粒子の衝突により新たな粒子が生成されることを意味する．波の振幅の 2 乗に比例する強度 $b^\dagger_{\vec{p}} b_{\vec{p}},\ d^\dagger_{\vec{p}} d_{\vec{p}}$ が粒子描像では，粒子および反粒子の数に比例する．電磁場も波と粒子の両方の性質を持ち，波の強度が強い時には古典的な電磁波として空間を伝わっていくが，波の強度が弱くなると粒子的な性質が目立つようになる．電磁場の場合，粒子と反粒子は一致する．場の量子論は，図 2 に示すように，力と波と粒子を場の概念で統一したものということができる．

クライン・ゴルドン方程式を使って後にパイ中間子 (パイオン) と呼ばれる新粒子を予言したのは湯川秀樹であった．原子の大きさは約 10^{-10} m 程度である．原子の中心部には 10 万分の 1 くらいの非常に小さな原子核がある．原子核は陽子と中性子からできているが，非常に強く結びついているため，ふつうの化学反応では決して変化しない．原子は電子と原子核のクーロン力で結びついている．原子核の中には陽子がいくつもあるのだから，原子核を結びつけている力は電気力に比べると桁違いに強い力でなければならない．陽子間にそんな強い力が働けば，とんでもないことがおきそうだが，幸いこの強い力は 10^{-15} m 程度の近距離でしか働かず，少し離れると全く効かなくなる．湯川はこ

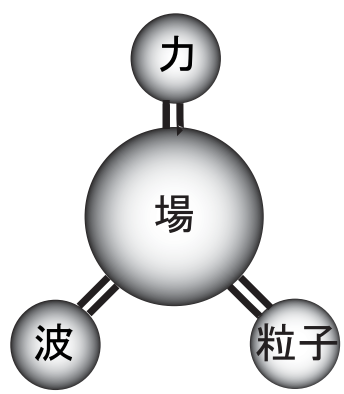

図 2: 力と波と粒子を場の概念で統一

の強い力に場の量子論を適用した．静的な場がこの強い力を引き起こすならば，クライン・ゴルドン方程式で時間微分を落として解けばよい．原点に場をつくる源があるとして，球対称の場合を考えると，$\phi(x)$ は $r = |\vec{x}|$ だけの関数として良いので (18) は

$$\frac{1}{r}\left(\frac{d^2}{dr^2} - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)(r\phi(r)) = 0$$

となるがこれを解くと

$$\phi(r) \propto \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r} \quad (\text{ただし}\, r_0 = \frac{\hbar}{mc})$$

という短距離力が得られる．つまり質量を持つ粒子による力は有限の距離しか届かないことが分かる．湯川は力の到達距離 r_0 に実験値の 10^{-15} m を代入して，電子の約 200 倍の質量を持つ粒子の存在を予言した．この粒子パイオンは後に宇宙線の中から発見された．

2.4　ディラック方程式

スカラー粒子や電磁場の波動方程式は時間に関して２階の微分方程式であったが，ディラックはこれを不服として時間に関して一階の微分方程式を追求した．スカラー場や電磁場などのボゾンは２階の微分方程式に従うのに対し，フェルミオンはディラックが発見した一階の波動方程式に従う．ディラックは質量を持つ粒子に対する波動方程式を導いたが，ここではまず質量を持たない粒子に対する波動方程式から始めよう．質量を持たない粒子のエネルギーと運動量の関係は (8) であるが，これに粒子と波を結ぶ量子論の関係式 $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ を代入すると，根号の中に微分が入った変な方程式になってしまう．ディラックは波動関数が幾つかの成分を持てば，根号の入らない微分方程式が得られることに気づいた．実際，

$$E = c(\sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3) \equiv c\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \tag{21}$$

と仮定して E^2 を作ると，$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ が

$$\begin{gathered} \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1, \\ \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 0 \quad (i \neq j) \end{gathered} \tag{22}$$

という代数（クリフォード代数）を満たせば，エネルギーと運動量の相対論的な関係式 $E^2 = c^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$ が得られる．ここで量子論の粒子と波の対応関係 $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$，$\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$ を代入すれば，一階の微分方程式（**ワイル方程式**）を導くことが出来る．

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\hbar c\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\psi \tag{23}$$

ここに現れた σ_1，σ_2，σ_3 の代数を満たすには，２行２列のパウリ行列を次のように定義すればよい

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{24}$$

パウリ行列は波動関数 ψ に作用するので，波動関数はもはや１成分ではなく，少なくとも２つの成分を持つ必要がある．スピノールと呼ばれる２成分の波動関数

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{25}$$

のローレンツ変換に対する性質は，ワイル方程式がすべての慣性系で同じ形を持つという要請により定まる．

パウリ行列は角運動量 $\vec{J}$ と $\vec{J} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ で関係している（スピン $\frac{1}{2}$ を持つという）．スピンの運動量方向の成分を**ヘリシティ**という．パウリ行列は２行２列の行列なのでヘリシティは２つの固有値を持つ．ワイル方程式の正エネルギーを持つ解は必ず正のヘリシティを持っている．実際，平面波の解

$$\psi(\vec{x}, t) = \mathrm{e}^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - E_{\vec{p}}t)/\hbar}\psi_{\vec{p}} \tag{26}$$

をワイル方程式に代入すると ($E_{\vec{p}} = c|\vec{p}|$ 故)

$$\left(\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right)\psi_{\vec{p}} = \frac{\hbar}{2}\ \psi_{\vec{p}}\ ,\ (\text{ただし}\vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}) \tag{27}$$

となるが，これはヘリシティの固有値が $\frac{\hbar}{2}$ であることを示している．

同じように (26) でエネルギーの符号だけを負に変えたものもワイル方程式の解となり，ヘリシティの固有値が $-\frac{\hbar}{2}$ となることが分かる．フェルミオンに対しては，**フェルミ統計**が適用され１つの状態に１つしか粒子が入り得ない．従って，負のエネルギー状態は既にすべて占拠されたのが真空だと考えると，真空状態は安定になる．負のエネルギー状態にあった粒子が抜けると，反対符号のエネルギー，運動量，スピンを持つ穴ができたように見える．これが反粒子の空孔理論的解釈である．運動量，スピンとも反対符号になるので，反粒子のヘリシティは $-\frac{\hbar}{2}$ のままである．この空孔理論は直感的に解釈するのに便利であるが，ボゾンの場合には１つの状態に粒子が何個でも入る (ボーズ統計) ので使えない．場の理論では (19) のように，正エネルギー解の係数を消滅演算子，負エネルギー解の係数を生成演算子と見なすので，不自然な空孔理論を用いる必要はない．

実はワイル方程式を導くときには不定性があった．式 (23) の代わりに逆符号の σ_i を用いて

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = i\hbar c\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\psi \tag{28}$$

としても良かった．この場合，正のエネルギーを持つ平面波の解は負のヘリシティ$-\frac{\hbar}{2}$ を持つことが分かる．

質量を持つ粒子は一定のヘリシティを持ち得ない．これを古典的に考えてみよう．質量 m の粒子が x 軸方向に運動量 p，エネルギー $E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ を持って速度 $v = cp/E$ で走っているとする．ヘリシティは進行方向の角運動量なので，x 軸まわりに自転しているとしよう．この粒子を x 軸方向に v よりも早い速度で走る人から見ると，この粒子は

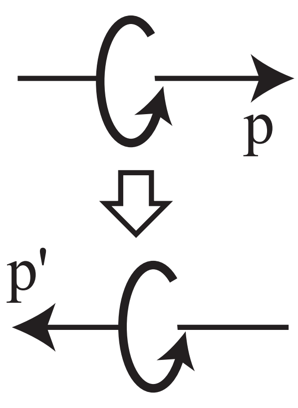

図 3: 粒子よりも速く走る人から見ると運動量の向きが変わるのでヘリシティの符号も変わる

x 軸の負の方向に向かって走っているように見える．x 軸まわりの角運動量は進行方向に垂直な $y-z$ 平面内の回転運動を表すので，走っている人から見ても変化しない．自転運動についても同じだと考えると，x 軸まわりのスピンは走っている人から見ても x 軸の正の方向を向いている．従って，図 3 に示すように，粒子よりも速く走る人から見ると，粒子の進行方向のスピン（ヘリシティ）は反対向きになってしまう．このように，質量

を持つ粒子は，正のヘリシティだけでなく負のヘリシティの解を持たなければならない．これに対し，質量がゼロの粒子は常に光速で走っているため，どんなに速い観測者も決して追いつくことができないので，一定のヘリシティを持つことができる．

それでは質量を持つ粒子の波動方程式はどのようなものだろうか．質量がゼロの場合に，正エネルギー解のヘリシティが正，負になるものをそれぞれ ψ_R，ψ_L と書くことにする．これはそれぞれ右巻きと左巻きの粒子に対応している．２つのワイル方程式を組み合わせ，右巻きと左巻きを混ぜる項を導入すると，次の**ディラック方程式**が得られる

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi_R}{\partial t} &= -i\hbar c\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\psi_R + mc^2\psi_L \\ i\hbar\frac{\partial\psi_L}{\partial t} &= i\hbar c\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\psi_L + mc^2\psi_R. \end{aligned} \tag{29}$$

この方程式はワイル方程式よりも前に，スピン $\frac{1}{2}$ を持つ電子に対する波動方程式としてディラックによって発見されていた．ディラック方程式では，**質量は右巻きと左巻きのヘリシティの混じり具合を表している**．

ψ_R と ψ_L を組み合わせた４成分スピノールを

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_R(x) \\ \psi_L(x) \end{pmatrix} \tag{30}$$

で定義すれば，ディラック方程式は次のように書くことができる．

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\,\psi(x) = 0. \tag{31}$$

ここで，４行４列のディラックの γ 行列は

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{bmatrix} \tag{32}$$

で定義される．ここで，$\mathbf{1}_2$ は２行２列の単位行列を表す.

2.5　ゲージ理論

再び複素スカラー場を考えよう．運動方程式 (20) は位相変換

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\theta}\phi(x)$$

を行っても同じ形を保つ．複素数を実部と虚部に分けて考えると，この位相変換は実部と虚部の回転を表しているので，どの方向を実数軸にとって実部・虚部を定義しても物理現象は変わらないことを意味している．この位相回転を空間の各点ごとに別々の角度で回してみたらどうだろうか．そこで次のような**局所ゲージ変換**に対する不変性を考える

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\theta(x)}\phi(x). \tag{33}$$

ここで回転角 $\theta(x)$ は各点ごとに異なっているので，場 $\phi(x)$ の微分はこの変換と交換しない．実際

$$\partial_\mu\phi(x) \to \partial_\mu\phi'(x) = e^{i\theta(x)}\left(\partial_\mu\phi(x) + i\partial_\mu\theta(x)\right)$$

となって形が全く変わってしまう．そこで**ゲージ場**と呼ばれるベクトル場を導入し

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \theta(x) \tag{34}$$

のように変換させれば，次の**共変微分**

$$D_\mu \phi(x) = \left(\partial_\mu - igA_\mu(x)\right)\phi(x) \tag{35}$$

は $\phi(x)$ と同じように変換される

$$D_\mu \phi(x) \to D'_\mu \phi'(x) = e^{i\theta(x)} D_\mu \phi(x). \tag{36}$$

局所ゲージ変換に不変な理論を作るには，ゲージ場を導入し微分を共変微分で置き換えればよいことが分かった．この置き換えで複素スカラー場やディラック場等の物質場とゲージ場の相互作用が決まってしまう．相互作用の強さは一つの結合定数 g だけで決まってしまう．この意味でゲージ場の相互作用は普遍的である．

空間の各点毎に位相変換を行っても物理現象が変わらないことを保証するために，ゲージ場が必要であった．ゲージ場は各点毎に違う実数軸の取り方の差を吸収する役割を果たしている．ゲージ場は４元ベクトル場 $A_\mu(x)$ であるが，(34) が示すように，ゲージ場の一部は各点毎の実数軸の取り方によって変わるため，観測できる量ではない．ディラック場と同じく A_μ もいくつかの成分あり，粒子描像ではスピンを持つことになる．ベクトル場はスピンが１のボゾンに対応する．普通スピン１の粒子は３つの自由度を持つが，局所ゲージ不変性により物理的に意味のある自由度は２成分になり，これが光子の持つ２つの偏光状態に対応している．

ゲージ場自身の波動方程式を求めよう．次の組み合わせはゲージ変換 (34) に不変でゲージ場の強さと呼ばれる

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{37}$$

相対論では電場や磁場は一つの２階反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ にまとめられ，$F_{10} = E_x, F_{20} = E_y, F_{30} = E_z$，$F_{12} = B_z, F_{23} = B_x, F_{31} = B_y$ で与えられる．ボゾンの波動方程式は２階の微分方程式なので，更に微分すると

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \partial^\mu \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = 0 \tag{38}$$

というマクスウェル方程式が得られる．ゲージ不変性のためにゲージ場の質量項 $m^2 A^\nu$ が許されないことに注意しておく．ローレンツ条件 $\partial^\mu A_\mu = 0$ を課せば先に挙げた電磁場の方程式 (14) に一致する．[3]

電磁場の持っていたゲージ対称性を拡張して，1950 年代始めにヤン・ミルズによって $SU(2)$ のゲージ理論が提唱された．ほぼ同時にまた独立に，内山龍雄によって任意の群に対するゲージ理論が構成された．現在では，すべての基本的な力はゲージ粒子により媒介されると考えている．

[3]運動方程式 (38) はゲージ変換に不変なので，A_μ が解ならば (34) の A'_μ もまた解になり一意的にを定まらない．ローレンツ条件を課して A_μ を一意に定める．

2.6 ラグランジアン

これまでスカラー場，電磁場，ディラック場の満たす方程式を求めたが，場の理論ではこれらの方程式は**作用原理**から統一的に導かれる[4]．作用原理というのは，場を各点ごとに

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) \tag{39}$$

のように少し変化させたとき，作用と呼ばれる

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\partial_\mu \phi, \phi) \tag{40}$$

が停留値をとるという要請から，場の方程式を導くことである．この要請からは次の**オイラー・ラグランジュの方程式**が導かれる

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(\partial_\mu \phi, \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}(\partial_\mu \phi, \phi)}{\partial \phi} = 0. \tag{41}$$

場が何種類もあるときには，それぞれの場に対しこのオイラー・ラグランジュの方程式が成り立つ．ここで場と場の一階微分の関数である**ラグランジアン**と呼ばれる量を，[5]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\partial_\mu \phi, \phi) &= \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - V(\phi) \\ V(\phi) &= m^2 \phi^\dagger \phi + \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 \end{aligned} \tag{42}$$

に選べば，複素スカラー場の運動方程式 (20) が得られる．この場合 ϕ は複素数なので $\phi^\dagger$ を独立変数として扱い，(41) で ϕ を $\phi^\dagger$ に置き換えた式を用いればよい．$V(\phi)$ はスカラー場に対するポテンシャルエネルギーを表し，原点 $\phi = 0$ で最小になるので，一番エネルギーが低い真空における期待値は $\langle \phi \rangle = 0$ となる．

ディラック方程式に対するラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m)\psi \tag{43}$$

に選べばよい．ここで，

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

で定義される量 $\bar{\psi}$ を独立変数として取り扱えば，$\mathcal{L}$ には $\bar{\psi}$ の微分が入っていないので (41) より直ちにディラック方程式 (31) が得られる．

次にゲージ場のラグランジアンを求めよう．スカラー場の例 (42) が示すように，ボゾンのラグランジアンは場の微分 $\partial_\mu \phi$ の 2 乗で与えられる．更にゲージ変換 (34) に対する不変性を要求すると，ラグランジアンは次のようになる

$$\mathcal{L}_G(x) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{44}$$

このラグランジアンの著しい特徴はゲージ不変性のためにゲージ場の質量項 $\frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu$ が許されないことである．このラグランジアンを用いて運動方程式 (41) を求めるとマクスウェル方程式 (38) が得られる．

[4]ニュートン力学における作用原理については作用原理自習ノート http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/higashij/lecture/am03/lec1.pdf を参照

[5]これより以後は長さの単位を取り替えて光速 c を 1 に，エネルギーの単位を取り替えて $\hbar = 1$ に選ぶ．

ラグランジアンは色々な場の波動方程式を一つの原理から導くだけでなく，相互作用がある場合にも大変有用である．例えば，電子の場と電磁場の相互作用を考えてみよう．この場合，電子と電磁場のそれぞれのラグランジアンの他に，電子場と電磁場の両方に依存する相互作用ラグランジアンを付け加える．この全体のラグランジアンから電子場と電磁場に対するオイラー・ラグランジュの方程式を導くと，同じ相互作用ラグランジアンから二つの方程式の相互作用項を得ることができる．

3　質量の起源

我々の世界は**クォーク・レプトン**と呼ばれるフェルミオンからできている．このフェルミオンの間の相互作用を媒介するのが力の源のゲージ場である．フェルミオン・ゲージ場は，どちらももともとは質量を持たない粒子である．これらの粒子に質量を与えるのが謎の粒子ヒッグス場である．この節では，質量を持たない素粒子がどのようにして質量を持つようになるかを考える．

3.1　フェルミオンの質量

質量がない場合のワイル方程式と，質量を持つディラック方程式を比べると，ワイル方程式の方が大きな対称性を持つことが分かる．波動関数は複素数なのでディラック方程式は次の位相変換

$$
\begin{aligned}
\psi_R(x) &\rightarrow \psi'_R(x) = e^{i\alpha}\psi_R(x) \\
\psi_L(x) &\rightarrow \psi'_L(x) = e^{i\alpha}\psi_L(x)
\end{aligned}
$$

に不変であるが，右巻きと左巻きの位相を逆向きに回転させる**カイラル変換**

$$
\begin{aligned}
\psi_R(x) &\rightarrow \psi'_R(x) = e^{i\beta}\psi_R(x) \\
\psi_L(x) &\rightarrow \psi'_L(x) = e^{-i\beta}\psi_L(x) \qquad (45)
\end{aligned}
$$

には，質量項があるために不変でない．これに対し質量を持たないワイル方程式はこのカイラル変換に対しても不変である．このことを，質量を持たないフェルミオンは**カイラル対称性**を持つという．対称性の観点からは，カイラル対称性が破れるためにフェルミオンが質量を得ると考えることができる．これらの変換は４成分のディラック場 (30) を用いれば

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x) \\
\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{i\beta\gamma_5}\psi(x) \qquad (46)
\end{aligned}
$$

と書くことができる．ここで

$$
\gamma_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{bmatrix}. \qquad (47)
$$

カイラル対称性の破れによってフェルミオンが質量を獲得することを提唱したのは南部陽一郎である．南部はもともとの理論がカイラル対称性を持っていても，真空がカイラル対称性を破るためフェルミオンが質量を獲得し，その代償として質量を持たない擬

スカラー粒子が出てくることを示した．真空は最もエネルギーの低い状態である．それ以降，真空がもともとの対称性を破ることを，**対称性の自発的破れ**というようになった．バーディーン・クーパー・シュリーファーは，金属のフェルミ面近傍の電子対がクーパー対を作るために超伝導現象が起きると考えた．南部の手法は，このアイデアを場の量子論に適用したものであるが，素粒子の質量の起源を説明する画期的な仕事であった．しかし，陽子や中性子がもともとは質量を持たず，カイラル対称性の自発的破れにより質量を獲得するという南部の主張は，発表当時はなかなか受け入れられなかった．特に，その代償として現れる質量 0 の粒子をパイオンと考えることには抵抗が強かったが，強い相互作用の世界では真理であることが次第に明らかになってきた．

カイラル変換 (45) は，ディラック場の 2 次式に対しては

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L\psi_R &\rightarrow \bar{\psi}'_L\psi'_R = e^{2i\beta}\bar{\psi}_L\psi_R \\ \bar{\psi}_R\psi_L &\rightarrow \bar{\psi}'_R\psi'_L = e^{-2i\beta}\bar{\psi}_R\psi_L \end{aligned} \tag{48}$$

となるので，

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{2i\beta}\phi, \quad \phi^\dagger \rightarrow \phi'^\dagger = e^{-2i\beta}\phi^\dagger \tag{49}$$

と変換される複素スカラー場を導入すれば，カイラル対称性を保つ相互作用を書くことができる．フェルミオンとボゾンの相互作用を**湯川相互作用**と言う．スカラー場とディラック場の湯川相互作用を表すラグランジアン

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - f(\bar{\psi}_R\psi_L\phi + \bar{\psi}_L\psi_R\phi^\dagger) \tag{50}$$

は，カイラル変換 (48)(49) に不変である．このスカラー場が何らかの理由で，真空期待値 $\langle\phi\rangle = v/\sqrt{2}$ を持てば，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{fv}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R) + \cdots \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_F)\psi + \cdots \end{aligned} \tag{51}$$

となり，フェルミオンはつぎのの質量を持つことになる

$$m_F = \frac{1}{\sqrt{2}}fv. \tag{52}$$

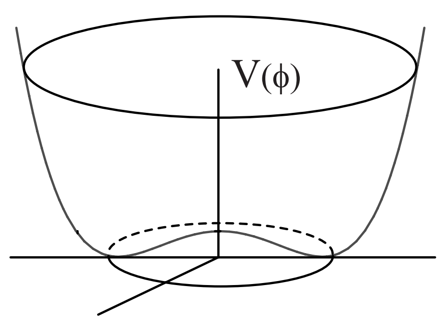

図 4: 対称性が自発的に破れるポテンシャルエネルギー

そこで，この複素スカラー場に対するポテンシャルエネルギー (42) の $\phi^\dagger\phi$ の係数が逆符号の場合を考えよう．$\mu^2 < 0$ の時，図 4 に示すように，原点は極大になっている．ポ

テンシャルエネルギー (42) が最小となるのは，回転対称性から $\phi^\dagger\phi = -\mu^2/(2\lambda)$ の円周上である．そこで円周上に一点を取り，そのまわりの小さな揺らぎの場 $\sigma(x), \pi(x)$ を

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma(x) + i\pi(x)) \tag{53}$$

で定義する．$V(\phi)$ を揺らぎの場で表せば

$$\begin{aligned} V(\sigma, \pi) &= \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2(x) + \frac{1}{2}m_\pi^2\pi^2(x) \\ &+\lambda v\sigma(\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 \end{aligned} \tag{54}$$

となる．ここで $\phi(x)$ の真空での期待値は

$$\langle\phi\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \tag{55}$$

となり，σ, π の質量は

$$m_\sigma^2 = 2\lambda v^2, \quad m_\pi^2 = 0 \tag{56}$$

で与えられる．σ は ϕ の大きさを変化させる揺らぎで，その大きさを動かすにはエネル

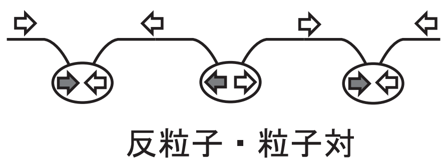

図 5: 真空に凝縮した反粒子・粒子対から質量を得る．白い矢印は粒子のヘリシティを示し，灰色の矢印は反粒子のヘリシティを示す．粒子の運動量はすべて右向きとし，反粒子の運動量はすべて左向きとしている．

ギーが必要なので質量を持つ．π は ϕ の位相を変える方向の揺らぎで，位相を変えてもエネルギーは変わらないので質量を持たない．本来，回転対称性から ϕ の真空期待値は零になるべきであるが，真空期待値を持てば対称性は破れる．この時，出てくる質量零の粒子 π を**南部・ゴールドストン粒子**と呼ぶ．これに対し，質量を持つ σ を**ヒッグス粒子**と呼ぶ．

　このカイラル対称性の自発的破れによるフェルミオンの質量を見てみよう．フェルミオンが質量 (52) を持つのは，ヒッグス場 ϕ が真空期待値を持つためである．南部の理論では，このヒッグス場は運動量 $\vec{p}$，ヘリシティ $\pm\hbar/2$ の粒子と，運動量 $-\vec{p}$，ヘリシティ $\mp\hbar/2$ の反粒子の束縛状態である．すなわち

$$\phi \equiv \bar{\psi}_L\psi_R, \qquad \phi^\dagger \equiv \bar{\psi}_R\psi_L. \tag{57}$$

この対が真空に凝縮していると，ヘリシティ $\pm\hbar/2$ の粒子が運動量 $\vec{p}$ で走る時，真空中のヘリシティ $\mp\hbar/2$ 運動量 $-\vec{p}$ の反粒子と対消滅し，ヘリシティ $\mp\hbar/2$ の粒子に変わる．この様子を図 5 に示す．

3.2 ゲージ場の質量

中性子やミューオンをベータ崩壊させる力を**弱い相互作用**という．その相互作用の強さが粒子の種類によらず普遍的なことから，弱い相互作用は電磁場と同じくベクトル粒子が媒介して起きることが分かった．一方，この力は湯川理論と同じく短距離力である．従って，質量を持つベクトル粒子が媒介していることになる．ところが前節で見たように，ベクトル粒子の理論であるゲージ場の理論では粒子の質量はゼロである．

複雑な現象を理解するのに対称性は有力な方法である．お互いに全く類似性のないものの集まりを理解するのは難しい．我々は何らかの共通点を見いだし，その共通項を出発点にして理解しようと務める．しかしながら，厳密な対称性は稀である．ほとんどの対称性は少しだけ破れている．対称性を壊す効果を理論の外から持ち込み出すと，折角の美しかった対称性も色あせた理論になってくる．そんなとき，もともとの理論は厳密な対称性を持っているが，低エネルギーの世界では対称性の破れた真空が選ばれるという南部のアイデアは魅力的である．その代償として質量を持たない南部・ゴールドストン粒子が出てきてしまう．世の中にはゲージ場以外の質量を持たないボーズ粒子は見つかっていない．かくして，折角の南部の魅力的な考えも強い相互作用の世界以外では使えそうにない．

この両方の困難を救ったのがヒッグス機構の発見である．不必要なゼロ質量のスカラー粒子を追い出すためには，ゲージ不変性があればよいことにヒッグスが気づいた．ゲージ不変性の導入により，ヒッグス場 $\phi(x)$ の位相部分である南部・ゴールドストン粒子が物理的な自由度ではなくなるのである．それと同時にゲージ場が質量を獲得する現象を**ヒッグス機構**と呼ぶ．

ここでは，簡単のために前節で考えたフェルミオンのカイラル対称性を，局所ゲージ対称性に拡大してみよう．すなわち，フェルミオンおよびスカラー場の変換則 (45)(49) において，β を場所に依存する $\beta(x)$ に置き換え局所的な変換を考える．[6]まず，複素スカラー場，ゲージ場およびフェルミオン全部のラグランジアンを書いておこう．(42)(44)(50) にそれぞれの共変微分 (35) を代入すると

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{total} &= \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F \\
\mathcal{L}_H &= (\partial^\mu + 2igA^\mu)\phi^\dagger(\partial_\mu - 2igA_\mu)\phi - V(\phi) \\
\mathcal{L}_G &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
\mathcal{L}_F &= \bar{\psi}_R i\gamma^\mu(\partial_\mu - igA_\mu)\psi_R \\
&\quad + \bar{\psi}_L i\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu)\psi_L \\
&\quad - f(\bar{\psi}_R\psi_L\phi + \bar{\psi}_L\psi_R\phi^\dagger).
\end{aligned} \tag{58}$$

ただし，ここでは４成分のディラック場 (30) を用いている

$$\psi_R \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi, \quad \psi_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi.$$

また，ψ_R, ψ_L, ϕ の位相変換則が異なるために共変微分も異なっている．ヒッグス場のポテンシャルが図 4 のようになっている場合に，どのような粒子が出てくるかを見るため，複素スカラー場を次の形に表す

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x))e^{i\theta(x)}. \tag{59}$$

[6]厳密にはアノマリーを避けるためにフェルミオンをもう１種類導入しなければならない．

ここで，v は真空期待値であり，$h(x)$ がヒッグス場，$\theta(x)$ が南部・ゴールドストン粒子を表す．(59) を $\mathcal{L}_H + \mathcal{L}_G$ に代入すると，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_H + \mathcal{L}_G &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 \\ &+\frac{1}{2}m_B^2 B_\mu^2 + \frac{1}{2}m_H^2 h^2 \\ &+2g^2(2vh + h^2)B_\mu^2 + \lambda v h^3 + \frac{1}{4}\lambda h^4\end{aligned} \tag{60}$$

となり，南部・ゴールドストン粒子は完全に消失する．同時に，(60) には次のようなゲージ場の質量項が現れる

$$\begin{aligned} m_B = 2gv, \quad m_H = \sqrt{2\lambda}v \\ B_\mu = A_\mu - \frac{1}{2g}\partial_\mu \theta. \end{aligned} \tag{61}$$

南部・ゴールドストン場 θ を吸収したゲージ場 B_μ は質量 m_B を獲得する．ゲージ場が媒介する力は，それに伴って短距離力となる．これは真空中に電荷が凝縮しているために，電気力線が真空中の電荷に吸収されて切断されるためである．

3.3 ヒッグスの謎

我々の世界を形作っているのは，クォーク・レプトンなどのフェルミオンである．基本的な力は，普遍的なゲージ場が媒介している．これらの粒子はどれも質量を持たない．局所的なカイラル対称性により禁止されるからである．これらの粒子に質量を与えるのはヒッグス場である．ヒッグス場はカイラル対称性の自発的破れを引き起こし，[7] フェルミオンに質量を与えると同時に，ヒッグス機構によりゲージ場にも質量を与える．大きな質量を獲得したゲージ場は近距離力となり，ミクロの世界に閉じこめられ，我々の世界には滅多に顔をのぞかせない．重くなってしまったフェルミオンやヒッグス粒子も，もっと軽い粒子に変わってしまい，マクロの世界には見つからない．

我々はこれらの基本粒子は見いだせないのだろうか．場の量子論では，十分なエネルギーを用意すれば，重い粒子も作ることができる．人類は加速器の助けを借りて，自然界に見いだせない電磁場の兄姉や，重いクォークを発見するのに成功した．しかし，ヒッグス粒子だけが未だに探索の手を逃れている．

ヒッグス粒子を作るには十分なエネルギーが要る．実験家は，大加速器を建設してヒッグス粒子を直接見つけようとしている．ヒッグス粒子が実際に出てこなくても，場の理論では真空においてさえもヒッグス場は絶えず揺らいでいる．ヒッグス場の揺らぎが我々の世界に与える影響を計算して，理論家はヒッグス粒子の質量を予想している．ヒッグス粒子が我々の前に姿を見せる日もそう遠くないだろう．

ヒッグス粒子を見つければすべてが分かるのだろうか．ヒッグスには謎が多い．すべての粒子に質量を与えるヒッグス粒子はどこから来たのだろうか．南部が考えたように，ヒッグス粒子はフェルミオンとその反粒子の複合粒子なのだろうか．それとも，更にミクロの世界から使わされたメッセンジャーなのだろうか．ヒッグス場の与える質量は，この世の最高エネルギーと考えられるプランク質量に較べると非常に小さい．ヒッグス場の質量は場の揺らぎによってプランク質量位の補正を受けるので，小さな値にとどまる

[7]現在の素粒子論の最も主要なアイデアは，ゲージ原理と対称性の自発的破れである．これらが，内山と南部により提唱されたことは，日本の物理学の誇りである

のは非常に難しい．最も自然な可能性は，ボゾンの揺らぎとフェルミオンの揺らぎが打ち消し合う**超対称理論**である．軽いヒッグス粒子の存在は超対称性の証拠なのだろうか．究極の理論，**超弦理論**へのヒントはあるのだろうか．

クォークやレプトンは何種類もある．各々がヒッグス粒子と様々な湯川相互作用をしている．ヒッグス粒子は違う種類のクォークを混ぜあわせるようだ．小林・益川はこれが CP 対称性が破れる原因だと考えた．高エネルギー加速器研究機構 (KEK) で行われている世界最高性能の電子・陽電子衝突実験が，まもなく検証してくれるだろう．ニュートリノもどうやらヒッグス粒子によって混じり合っているらしい．これも KEK から，東京大学宇宙線研究所のスーパーカミオカンデに向けて打ち出されるニュートリノ実験で明らかになるであろう．

ヒッグス粒子の発見はヒッグスの謎の幕開けとなるであろう．ヒッグス粒子のもたらすメッセージを解き明かす準備を進めなければならない．