Twisted S_4 Flavor Symmetry and Large Neutrino Mixing

清水　勇介

新潟大学

2011 年 1 月 25 日

余剰次元物理 2011 (Extra Dimension 2011) @大阪大学

共同研究者：石森一、谷本盛光、渡邊 篤史

- Neutrino masses and mixing from S_4 flavor twisting
  (H. Ishimori, Y.S., M. Tanimoto, and A. Watanabe, arXiv:1010.3805; accepted in PRD.)

概要

1. Introduction
    - ニュートリノ振動実験
    - 非可換離散対称性
2. Flavor Twisting
    - セットアップ
    - ニュートリノセクター
    - 荷電レプトンセクター
3. Summary

1. Introduction

- ニュートリノ振動実験の global fit:
  (T. Schwetz, M. Tórtola, and J. W. F. Valle, hep-ph/0808.2016)

parameter	best fit	2σ	3σ	tri-bimaximal
$\sin^2\theta_{12}$	0.318	0.29-0.36	0.27-0.38	1/3
$\sin^2\theta_{23}$	0.50	0.39-0.63	0.36-0.67	1/2
$\sin^2\theta_{13}$	0.013	0-0.039	0-0.053	0
$\Delta m^2_{\mathrm{sol}}$ $[10^{-5}\mathrm{eV}^2]$	7.59	7.22-8.03	7.03-8.27	*
$\lvert\Delta m^2_{\mathrm{atm}}\rvert$ $[10^{-3}\mathrm{eV}^2]$	2.40	2.18-2.64	2.07-2.75	*

- レプトンの混合角

$$\sin^2\theta_{12} \simeq \frac{1}{3}, \quad \sin^2\theta_{23} \simeq \frac{1}{2}, \quad \sin^2\theta_{13} \simeq 0.$$

Tri-bimaximal混合！

- レプトンフレーバー混合： tri-bimaximal 混合

$$V_{\text{tri-bi}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad |\nu_\alpha\rangle = V_{\alpha i}|\nu_i\rangle$$

P.F. Harrison, D. H. Perkins, W. G. Scott, Phys. Lett. B **530** 167 (2002).

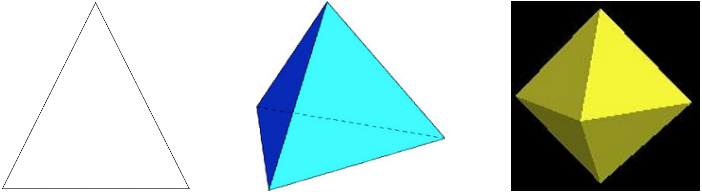
- Tri-bimaximal 混合行列を導く質量行列：
（荷電レプトンの質量行列は対角的なベースで）

$$\begin{aligned} M_\nu &= V_{\text{tri-bi}}\ \text{diag}(m_1, m_2, m_3)\ V_{\text{tri-bi}}^T \\ &= \frac{m_1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{m_2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{m_3}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

非可換離散対称性

非可換離散対称性は世代間に関係がつくので、
tri-bimaximal 混合を導く： $S_3, A_4, S_4, \cdots$

- E. Ma and G. Rajasekaran, Phys. Rev. D 64, 113012 (2001).
- G. Altarelli and F. Feruglio, Nucl. Phys. B 720, 64 (2005); Nucl. Phys. B 741, 215 (2006).



世代対称性の破れ方

- 自発的対称性の破れ（スカラー場を導入）
- 高次元空間における境界条件による破れ

境界条件による世代対称性の破れ

- Flavor Twisting: スカラー場を導入せずに世代対称性を破る。

S_3 離散対称性を用いて、tri-bimaximal 混合行列を導出

N. Haba, A. Watanabe, and K. Yoshioka, Phys. Rev. Lett. 97:041601 (2006).

S_3 離散対称性：既約表現は $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}'$, $\mathbf{2}$

S_4 離散対称性に拡張

- 既約表現は $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}'$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{3}'$
- パラメータの数が少なくでき、モデルの予言力を高める。
- S_3 のときとは違った質量行列の構造を得る。

S_4 離散対称性

- S_4 群の要素：（e は単位要素）

$$P^3 = e, \quad Q^4 = e, \quad QP^2Q = P, \quad QPQ = PQ^2P$$

- S_4 の生成元 Q と P（3 次元表現）：

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- S_4 群の全ての要素（24 個）は生成元 Q と P で書き表せる。

$$\begin{array}{llll}
a_1 = Q^4, & a_2 = Q^2, & a_3 = PQ^2P^2, & a_4 = Q^2PQ^2P^2, \\
b_1 = P, & b_2 = Q^2P, & b_3 = QPQP^2, & b_4 = Q^2PQ^2, \\
c_1 = P^2, & c_2 = Q^2P^2, & c_3 = QPQ, & c_4 = Q^3PQ, \\
d_1 = PQPQ^2, & d_2 = PQP, & d_3 = Q^3, & d_4 = Q, \\
e_1 = Q^2PQ, & e_2 = PQ, & e_3 = Q^3P^2, & e_4 = QP^2, \\
f_1 = QPQ^2, & f_2 = PQP^2, & f_3 = P^2Q, & f_4 = QP.
\end{array}$$

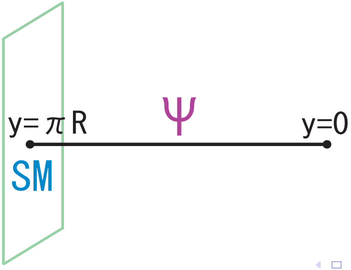
2. Flavor Twisting

セットアップ

- S^1/Z_2 の 5 次元模型
- 5 次元右巻きニュートリノ Ψ の導入 (gauge singlet)

  K. R. Dienes, E. Dudas and T. Gherghetta, Nucl. Phys. B **557** 25 (1999).

  N. Arkani-Hamed, et al. Phys. Rev. D **65** 024032 (2002).
- SM フェルミオンは 4 次元時空 ($y = \pi R$) に局在化



S^1/Z_2 オビフォルド

境界条件

$$\Psi_i(x,-y) = Z_{ij}\otimes\gamma_5\Psi_j(x,y)$$
$$\Psi_i(x,\pi R-y) = Z'_{ij}\otimes\gamma_5\Psi_j(x,\pi R+y)$$

整合条件

$$Z^2=\mathbf{1},\quad Z'^2=\mathbf{1}$$

- Z と Z' は模型がもつ対称性の要素でなければならない。

- 右巻きニュートリノを含む 5 次元の Lagrangian

$$\mathcal{L}_{5D} = i\bar{\Psi}_j\Gamma^M\partial_M\Psi_j - \frac{1}{2}\left[\bar{\Psi}_i^c(M_{ij})\Psi_j + h.c.\right] - \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\left[\bar{\Psi}_i(Y_{\nu_{ij}})L_jH + \bar{\Psi}_i^c(Y_{\nu_{ij}}^c)L_jH + h.c\right]\delta(y-\pi R)$$

- バルクフェルミオン： Kaluza-Klein(KK) モード展開

$$\Psi_i(x,y) = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty}\chi_{R_{ij}}^n(y)\psi_{R_j}^n(x) \\ \sum_{n=0}^{\infty}\chi_{L_{ij}}^n(y)\psi_{L_j}^n(x) \end{pmatrix}$$

- 展開係数 $\chi_{R,L}^n(y)$ は次のような規格化条件を満たす。

$$\int_0^{\pi R} dy \left[{\chi_{R,L}^m}^\dagger \chi_{R,L}^n\right]_{ij} = \delta_{mn}\delta_{ij}$$

- 5 次元方向を積分した後の Lagrangian:

$$\mathcal{L}_{4D} = iN^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu N - \frac{1}{2}(N^T \epsilon \otimes M_N N + h.c.)$$

$$M_N = \left(\begin{array}{c|c} 0 & M_D^{\mathrm{T}} \\ \hline M_D & M_H \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccccc} & M_0^{\mathrm{T}} & M_0^{c\,\mathrm{T}} & M_1^{\mathrm{T}} & M_1^{c\,\mathrm{T}} & \cdots \\ \hline M_0 & -M_{R_{00}}^* & M_{K_{00}} & & & \cdots \\ M_0^c & M_{K_{00}}^{\mathrm{T}} & M_{L_{00}} & & & \cdots \\ M_1 & & & -M_{R_{11}}^* & M_{K_{11}} & \cdots \\ M_1^c & & & M_{K_{11}}^{\mathrm{T}} & M_{L_{11}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right), \quad N = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \epsilon\psi_R^{0\,*} \\ \psi_L^0 \\ \epsilon\psi_R^{1\,*} \\ \psi_L^1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ϵ は 2×2 の反対称テンソル

- 左巻きマヨラナニュートリノの質量行列 M_ν:

$$M_\nu = -M_D^T M_H^{-1} M_D$$

$M_D \ll M_H$ のとき、シーソー機構が働く。

- 運動項

$$M_{K_{mn}} = \int_0^{\pi R} dy \chi_R^{m\dagger}(y)(-\partial_y)\chi_L^n(y)$$

- マヨラナ質量項

$$M_{R_{mn}} = \int_0^{\pi R} dy \chi_R^{m\,T}(y) M \chi_R^n(y), \; M_{L_{mn}} = \int_0^{\pi R} dy \chi_L^{m\,T}(y) M \chi_L^n(y)$$

- ディラック質量項

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \chi_R^{n\,\dagger}(\pi R) m, \quad M_n^c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \chi_L^{n\,T}(\pi R) m^c$$

Lagrangian

$$\mathcal{L}_{5D} = i\bar{\Psi}_j \Gamma^M \partial_M \Psi_j - \frac{1}{2}\left[\bar{\Psi}_i^c (M_{ij}) \Psi_j + h.c.\right]$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\left[\bar{\Psi}_i (Y_{\nu_{ij}}) L_j H + \bar{\Psi}_i^c (Y^c_{\nu_{ij}}) L_j H + h.c\right] \delta(y - \pi R)$$

$m_{ij} = Y_{\nu_{ij}} v, \; m^c_{ij} = Y^c_{\nu_{ij}} v$ （v はヒッグス場の真空期待値）

ニュートリノセクター

S_4 離散対称性で Flavor Twisting を考える。

- 表現の割り当て

	バルクフェルミオン (Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3)	レプトン (L_e, L_μ, L_τ)	ヒッグス H
$SU(2)_L$	1	2	2
S_4	$\mathbf{3}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{1}$

- S_4 不変な質量パラメータ：

$$M_{ij} = M\delta_{ij}, \quad m_{ij} = m\delta_{ij}, \quad m^c_{ij} = m^c\delta_{ij}$$

- 整合条件 $Z^2 = \mathbf{1}$ かつ $Z'^2 = \mathbf{1}$ を満たす S_4 の群の要素

Z'

		a_1	a_2	a_3	a_4	d_1	d_2	f_1	f_3	e_1	e_4
	a_1										
	a_2							$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_4$
	a_3					$\mathcal{C}_5$	$\mathcal{C}_6$			$\mathcal{C}_7$	$\mathcal{C}_8$
	a_4					$\mathcal{C}_9$	$\mathcal{C}_{10}$	$\mathcal{C}_{11}$	$\mathcal{C}_{12}$		
Z	d_1			$\mathcal{B}_1$	$\mathcal{B}_2$			$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_4$
	d_2			$\mathcal{B}_3$	$\mathcal{B}_4$			$\mathcal{A}_5$	$\mathcal{A}_6$	$\mathcal{A}_7$	$\mathcal{A}_8$
	f_1		$\mathcal{B}_5$		$\mathcal{B}_6$	$\mathcal{A}_9$	$\mathcal{A}_{10}$			$\mathcal{A}_{11}$	$\mathcal{A}_{12}$
	f_3		$\mathcal{B}_7$		$\mathcal{B}_8$	$\mathcal{A}_{13}$	$\mathcal{A}_{14}$			$\mathcal{A}_{15}$	$\mathcal{A}_{16}$
	e_1		$\mathcal{B}_9$	$\mathcal{B}_{10}$		$\mathcal{A}_{17}$	$\mathcal{A}_{18}$	$\mathcal{A}_{19}$	$\mathcal{A}_{20}$		
	e_4		$\mathcal{B}_{11}$	$\mathcal{B}_{12}$		$\mathcal{A}_{21}$	$\mathcal{A}_{22}$	$\mathcal{A}_{23}$	$\mathcal{A}_{24}$		

- Category $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ と $\mathcal{C}$ は観測と合う。

- Category $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}_9 : \quad Z = f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z' = d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 境界条件を満たす KK モード展開：

$$\chi_R^0(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} V \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{y}{3R}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{y}{3R}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_L^0(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} V \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{y}{3R}} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{y}{3R}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_R^n(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi R}} V \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{i\left(n+\frac{1}{3}\right)\frac{y}{R}} & \frac{1}{2} e^{-i\left(n-\frac{1}{3}\right)\frac{y}{R}} & 0 \\ \frac{1}{2} e^{-i\left(n+\frac{1}{3}\right)\frac{y}{R}} & \frac{1}{2} e^{i\left(n-\frac{1}{3}\right)\frac{y}{R}} & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{n}{R}y\right) \end{pmatrix} \qquad (n \geq 1)$$

$$\chi_L^n(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi R}} V \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{i\left(n+\frac{1}{3}\right)\frac{y}{R}} & \frac{-1}{2} e^{-i\left(n-\frac{1}{3}\right)\frac{y}{R}} & 0 \\ \frac{-1}{2} e^{-i\left(n+\frac{1}{3}\right)\frac{y}{R}} & \frac{1}{2} e^{i\left(n-\frac{1}{3}\right)\frac{y}{R}} & 0 \\ 0 & 0 & \sin\left(\frac{n}{R}y\right) \end{pmatrix} \qquad (n \geq 1)$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \omega & \omega^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega \equiv e^{i2\pi/3}$$

- 左巻きマヨラナニュートリノの質量行列：

$$M_\nu = \frac{1}{\Lambda R}\left[\frac{1}{6}\frac{s|M|R}{c+1/2}\frac{m^2}{M^*}\begin{pmatrix}4 & -2 & -2\\ -2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\frac{|M|R}{\tanh(\pi|M|R)}\frac{m^2}{M^*}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\frac{s|M|R}{c+1/2}\frac{(m^c)^2}{M}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\frac{|M|R}{c+1/2}\frac{mm^c}{|M|}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\right],$$

$$c \equiv \cosh(2\pi|M|R), \quad s \equiv \sinh(2\pi|M|R)$$

- Tri-bimaximal 混合行列でニュートリノ質量行列を回転：

$$M_\nu = \frac{-|M|}{\Lambda} V_{\text{tri-bi}} \begin{pmatrix} \frac{-2s}{2c+1}\frac{m^2}{M^*} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2c+1}\frac{mm^c}{|M|} \\ 0 & \frac{-1}{\tanh(\pi|M|R)}\frac{m^2}{M^*} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2c+1}\frac{mm^c}{|M|} & 0 & \frac{2s}{2c+1}\frac{(m^c)^2}{M} \end{pmatrix} V_{\text{tri-bi}}^{\mathrm{T}}$$

ディラック質量 m^c

- $m^c = 0 \rightarrow$ 逆階層型 $(m_3 = 0)$
- $m^c \neq 0 \rightarrow$ 混合は tri-bimaximal からずれる。

- ニュートリノの質量固有値： $r \equiv |m^c|/|m|$

$$m_1 = \frac{|m|^2}{\Lambda}\frac{1}{2c+1}\left| s(1-r^2) + \sqrt{s^2(1+r^2)^2+3r^2} \right|,$$
$$m_2 = \frac{|m|^2}{\Lambda}\frac{1}{2c+1}\left[\frac{2c+1}{\tanh(\pi|M|R)} \right],$$
$$m_3 = \frac{|m|^2}{\Lambda}\frac{1}{2c+1}\left| s(1-r^2) - \sqrt{s^2(1+r^2)^2+3r^2} \right|$$

- ニュートリノの世代混合： ρ, σ は質量パラメータの位相

$$U_{e2} = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\rho}, \quad U_{e3} = \frac{2i}{\sqrt{6}}\sin\theta e^{i\rho}, \quad U_{\mu 3} = -i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta e^{i\sigma} + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta e^{i\rho}\right)$$

数値解析

- パラメータ：$\frac{|m|^2}{\Lambda}$, $|M|R$, r
- 観測量：$\Delta m^2_{\mathrm{sol}}$, $|\Delta m^2_{\mathrm{atm}}|$, $\sum_i m_i$

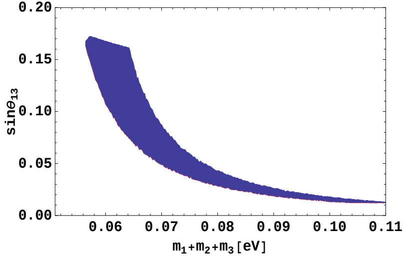
数値解析（順階層型）

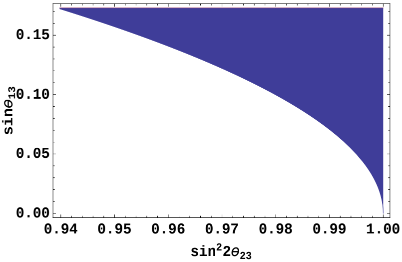
Input

- ニュートリノ振動実験の global fit の 3σ (eV^2)

$$7.03 \times 10^{-5} \leq \Delta m^2_{\mathrm{sol}} \leq 8.27 \times 10^{-5}$$

$$2.07 \times 10^{-3} \leq |\Delta m^2_{\mathrm{atm}}| \leq 2.75 \times 10^{-3}$$





- 実験の 3σ： $\sin\theta_{13} \leq 0.23, \quad 0.88 \leq \sin^2 2\theta_{23} \leq 1$

荷電レプトンセクター

- S_4 表現の割り当て：

	e_R	(μ_R, τ_R)	(L_e, L_μ, L_τ)	H	(ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3)
$SU(2)_L$	1	1	2	2	1
S_4	**1**	**2**	**3**	**1**	**3**

- S_4 不変な Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \frac{Y_s}{\Lambda} \bar{e}_R (L_e\phi_1 + L_\mu\phi_2 + L_\tau\phi_3) H^* \quad \mathbf{1} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{1}$$

$$+ \frac{Y_d}{\Lambda} \left[(\bar{\mu}_R + \bar{\tau}_R) L_e \phi_1 + (\omega^2 \bar{\mu}_R + \omega \bar{\tau}_R) L_\mu \phi_2 + (\omega \bar{\mu}_R + \omega^2 \bar{\tau}_R) L_\tau \phi_3 \right] H^*$$

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{1}$$

- 荷電レプトンの質量行列：　$\alpha_i \equiv \langle \phi_i \rangle / \Lambda,\ \langle H \rangle = v$

$$M_\ell = vY_s \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + vY_d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \omega^2\alpha_2 & \omega\alpha_3 \\ \alpha_1 & \omega\alpha_2 & \omega^2\alpha_3 \end{pmatrix}$$

- $M_\ell^\dagger M_\ell$:

$$M_\ell^\dagger M_\ell \\ = v^2 \begin{pmatrix} \left(|Y_s|^2 + 2|Y_d|^2\right)\alpha_1^2 & \left(|Y_s|^2 - |Y_d|^2\right)\alpha_1\alpha_2 & \left(|Y_s|^2 - |Y_d|^2\right)\alpha_1\alpha_3 \\ \left(|Y_s|^2 - |Y_d|^2\right)\alpha_1\alpha_2 & \left(|Y_s|^2 + 2|Y_d|^2\right)\alpha_2^2 & \left(|Y_s|^2 - |Y_d|^2\right)\alpha_2\alpha_3 \\ \left(|Y_s|^2 - |Y_d|^2\right)\alpha_1\alpha_3 & \left(|Y_s|^2 - |Y_d|^2\right)\alpha_2\alpha_3 & \left(|Y_s|^2 + 2|Y_d|^2\right)\alpha_3^2 \end{pmatrix}$$

質量と混合

- 荷電レプトンの質量： $\alpha_1 \ll \alpha_2 \ll \alpha_3$

$$\alpha_1 v \sim m_e, \quad \alpha_2 v \sim m_\mu, \quad \alpha_3 v \sim m_\tau$$

- 荷電レプトンの混合：

$$\theta_{12}^\ell \sim \mathcal{O}(m_e/m_\mu), \quad \theta_{13}^\ell \sim \mathcal{O}(m_e/m_\tau), \quad \theta_{23}^\ell \sim \mathcal{O}(m_\mu/m_\tau)$$

3. Summary

結論

- 世代対称性の破れは5次元時空におけるバルクの右巻きニュートリノの境界条件によって引き起こされる。
- $\sin\theta_{13}$ が大きいとニュートリノは順階層型である。
- θ_{13} と θ_{23} に相関がある。

展望

- 荷電レプトンセクターを明瞭にする。
- 高次元の枠組みにおいて、クォークセクターを議論する。
- 6次元模型を考える。(T^2/Z_3)

典型的な非可換離散群

H. Ishimori, T. Kobayashi, H. Ohki, H. Okada, Y. S., M. Tanimoto, Prog. Theor. Phys. Suppl. 183:1-163 (2010).

- 対称群 S_n (群の要素の数：$n!$)

	要素の数	幾何学的構造	既約表現
S_3	6	正三角形	$1, 1', 2$
S_4	24	正八面体	$1, 1', 2, 3, 3'$

- 偶置換の群 A_n (群の要素の数：$n!/2$)

	要素の数	幾何学的構造	既約表現
A_4	12	正四面体	$1, 1', 1'', 3$

- T' 群

	要素の数	幾何学的構造	既約表現
T'	24		$1, 1', 1'', 2, 2', 2'', 3$