「次元正則化は物理か?」

《目次》

1. Dim. reg. の利点

- 多くの sym. を保つ (特に Lorentz, gauge)
- 1回の操作で全ての積分が finite (↔ Pauli-Villars)
  UV div. と IR div. を同時に regularize.
- 様々な便利な計算テクニックが存在 (⇐ 解析接続; singularity が pole)
  解析計算 … (IBP id. による) 漸化式, etc.
  数値計算 … sector-decomp. + plus-distr., etc.
- loop 積分の漸近展開 ⟺ EFT との対応, 基礎づけ

⋮

2. Dim. reg. の問題点

- $D \notin \mathbb{N}$ では場の理論として ill-defined
- 摂動計算だけで定義するとしても、naive には $D \notin \mathbb{N}$ での値は unique には定まらない。
- 通常の定義に従うと、非物理的な等式が成り立つ。
  (e.g. UV div. $\underset{\text{入れ替わり}}{\Longleftrightarrow}$ IR div. cf. $\int \frac{d^Dk}{(k^2)^2} = 0$)
- 理論の UV のふるまいだけを変更したという感覚に乏しい。
  Regularization indep., decoupling 定理との関連
- $\frac{1}{\epsilon}$ は本当に UV div., IR div. を表しているのか？
  naive には No. (発散していても $1/\epsilon$ を含まない積分を書ける。)

※ 個人的には、QCD の物理量の摂動計算において、本当に short-dist. の物理を精確に計算しているのか、その保証が欲しい。

今日の目標

。摂動計算だけで定義するとしても、naiveには$D\notin\mathbb{N}$での値は
uniqueに定まらない。

$$\int d^Dk_1 \cdots d^Dk_\ell \frac{1}{(k_1^2+m_1^2)[(k_1+p_1)^2+m_2^2](k_2+k_3)^2\cdots}$$

これは $D\in\mathbb{N}$ でのみ定義されている。

$$= \int d^Dk_1\cdots d^Dk_\ell \frac{1}{\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_n}$$

$$\int_0^\infty d\alpha\, e^{-\alpha\Delta} = \frac{1}{\Delta}$$

$$= \int d^Dk_1\cdots d^Dk_\ell \int_0^\infty d\alpha_1\cdots d\alpha_n \exp[-\underbrace{(\alpha_1\Delta_1+\cdots+\alpha_n\Delta_n)}]$$

$k_1,\cdots,k_\ell$ の2次形式

$\to k^T A\cdot k + J\cdot k + c$ $\quad k=\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots \\ k_\ell\end{pmatrix}$

$$= \text{const.}\int_0^\infty d\alpha_1\cdots d\alpha_n\,[\det A(\alpha)]^{-D/2}\exp[J^T A^{-1} J - c]$$

ここまで $D\in\mathbb{N}$

"Dim. reg." : $D\notin\mathbb{N}$の場合も、積分がwell-definedな領域では同じ式で値を定義。→ 解析接続

しかし、"dim. reg."という言葉通りならば、一般に $D\in\mathbb{N}$でゼロとなる関数

e.g. $\quad \sin(\pi D) = \dfrac{\pi}{\Gamma(D)\Gamma(1-D)}$ に比例する関数

を足しておいてもよいだろう。

勝手な計算手法を編み出したときに、$D\notin\mathbb{N}$で上の定義と同じ値となっているか分からない。

Regularization indep.

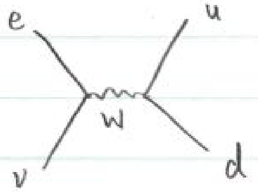
物理量の間の関係は regularization indep. になってほしい。

即ち、$\begin{cases} \text{lattice} & a \to 0 \\ \text{Pauli-Villars} & \Lambda \to \infty \end{cases}$

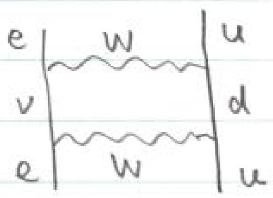
としたときに、同じ関係式を得ると期待する。

(物理的背景)

Decoupling 定理　　(Appelquist, Carazzone)



重い粒子の効果は $O\left(\frac{E^2}{M_W^2}\right)$



Regularization ⟺ 理論のUVの構造のみ変える。

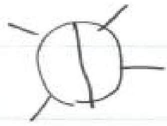
$\Lambda \to \infty$ で decouple

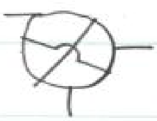
☆ Dim. reg. は理論のUVの構造のみを変えたことになっているのか？

3. Dim. reg. の定義と uniqueness

(その1) 具体的な定義を与える方法 (Euclidean)

- Massless detachable subgraph を含まない場合





$$\int d^Dk_1 \cdots d^Dk_\ell \frac{1}{\Delta_1 \cdots \Delta_n} \equiv \pi^{D/2} \int_0^\infty d\alpha_1 \cdots d\alpha_n (\det A)^{-D/2} \exp[J A^{-1} J - C]$$

- Massless detachable subgraph を含む場合

$$\underbrace{\int d^Dk_1 \frac{1}{(k_1^2)^a}}_{=0} \times \int d^Dk_2 \cdots d^Dk_\ell \frac{1}{\underbrace{\Delta_1 \cdots \Delta_n}_{\text{indep. of } k_1}} = 0$$

上がその具体例となっている。

(その2) 公理論的構成法 (Euclidean)

以下の性質を満たす consistent な積分が存在すれば、それは unique である。

(1) 線形性

$$\int d^Dk\, [a f(k) + b g(k)] = a \int d^Dk\, f(k) + b \int d^Dk\, g(k)$$

(2) スケーリング

$$\int d^Dk\, f(ak) = a^{-D} \int d^Dk\, f(k)$$

(3) 並進対称性・回転対称性

$$\int d^Dk\, f(k+p) = \int d^Dk\, f(k), \quad \int d^Dk\, f(Rk) = \int d^Dk\, (Rf)(k)$$

(4) 規格化 $\displaystyle \int d^Dk\, d^{D'}p\, \exp(-k^2 - p^2) = \int d^{D+D'}k\, \exp(-k^2)$

$D \in \mathbb{N}$ では通常の積分と一致

Rem

- Euclideanでは Dの meromorphic fn.（有理型関数）であることを示せる。
  極以外の特異性をもたない解析関数

- Minkowskiでも実用上問題が生じたことはない。

- （その2）の証明：線形写像なので、あるbasisの変換先が uniqueに決まっていればよい。basisとして $\{f_{s,q}(k) = \exp[-s^2(k+q)^2]\}$ を選ぶ。

  被積分関数の関数基底

  すると、
$$\int d^D k\, f_{s,q}(k) = s^{-D}\int d^D k \exp(-k^2) \underset{(4)}{=} \pi^{D/2} s^{-D}$$

- $\int d^D k\, f(k+p) = \int d^D k\, f(k)$ より、
$$\boxed{\int d^D k \frac{\partial}{\partial k^\mu} f(k) = 0}$$

finiteな積分の場合は
確かに成り立つ。

$\int d^D k \exp(-k^2) = e^{F(D)}$ とおくと、$F(D)+F(D') = F(D+D')$

$D'=0$ とおくと $F(0)=0$

また、
$$F'(D) = \lim_{D'\to 0}\frac{F(D+D')-F(D)}{D'} = \lim_{D'\to 0}\frac{F(D')}{D'} = F'(0) = \text{indep. of } D$$
$$\therefore F(D) = \text{const.}\times D \implies e^{F(D)} = C^D$$

$D=1$ での積分値から、$C=\sqrt{\pi}$

4. Dim. reg. を subtraction による正則化と見なす

先程の定義を念頭に置きつつも見方を変える。
以下 $0<\epsilon\ll 1$ とする。$(D=4-2\epsilon)$

★ dim reg. ではどんな積分にも finite な値を assign する。
↓
元々発散している積分の場合、何分"無限大"を subtract している筈。

例
$$\int d^Dk \frac{1}{(k^2+m^2)^2} = \int d^Dk \frac{1}{(k^2+m^2)^2} - \text{const.}\times \underbrace{\int d^Dk \frac{\partial}{\partial k^\mu}\frac{k^\mu}{(k^2+M^2)^2}}_{=0}$$

$$\frac{\partial}{\partial k^\mu}\frac{k^\mu}{(k^2+M^2)^2} = \frac{D}{(k^2+M^2)^2} + k^\mu \frac{-2}{(k^2+M^2)^3}2k^\mu$$

$$= \frac{D}{(k^2+M^2)^2} + \frac{-4\left[(k^2+M^2)-M^2\right]}{(k^2+M^2)^3}$$

$$= \frac{D-4}{(k^2+M^2)^2} + \frac{4M^2}{(k^2+M^2)^3}$$

$\text{const.}=\dfrac{1}{D-4}$ として、$0=\displaystyle\int d^Dk\left[\frac{1}{(k^2+M^2)^2}+\frac{4M^2}{D-4}\frac{1}{(k^2+M^2)^3}\right]$

を引く。

$$= \int d^Dk \underbrace{\left[\frac{1}{(k^2+m^2)^2} - \frac{1}{(k^2+M^2)^2}\right]}_{\sim\frac{1}{k^6}} + \underbrace{\frac{4M^2}{D-4}}_{1/\epsilon} \int d^Dk \underbrace{\frac{1}{(k^2+M^2)^3}}_{\sim\frac{1}{k^6}}$$

$= \dfrac{1}{\epsilon}\times(D\to 4$ で finite な積分$)$

元々発散している積分は $\int d^Dk \frac{\partial}{\partial k^\mu} \boxed{} = 0$ を引いて、$\overbrace{\text{finite}}^{\epsilon\to 0\text{で}}$な積分で置き換えていると考えられる。(但し、係数に $1/\epsilon^n$ が現れ得る。)
UVの構造だけを変えているわけではない。

<u>Rem</u>

$$0 = \int d^Dk \frac{\partial}{\partial k^\mu}\left[\frac{k^\mu}{(k^2)^n}\right] = \int d^Dk \frac{D-2n}{(k^2)^n}$$

$$\therefore \int d^Dk \frac{1}{(k^2)^n} = 0.$$

5. Dim. reg. と cut-off reg. で同じ結果となること.

$$\text{Cut-off reg.} = \begin{cases} \text{Pauli-Villars} \\ (L\to\infty\text{の})\ \text{lattice} \\ \text{Heat kernel} \quad \dfrac{1}{p^2+m^2} \to \dfrac{K(p^2/\Lambda^2)}{p^2+m^2} \end{cases}$$

2つのobservationを使う。

① Cut-off reg. でも $\int d^4k \frac{\partial}{\partial k^\mu} \boxed{} = 0$ が成り立つ。

② Cut-off reg. でのくりこみ可能性の証明が存在する。

ϕ^4理論　Polchinski　NPB231 (1984) 269
ゲージ理論　Warr　Ann. Phys. (NY) 183 (1988) 1

⋮

Dim. reg. と cut-off reg. の両方を同時に行なって、ある observable A を摂動計算して、くりこまれた coupling で表す。Counter term は全て運動量積分で表しておく。

UV div. は ① $\int d^D k \frac{\partial}{\partial k^\mu} \boxed{} = 0$ の形で subtract して、全て $\left\{ \begin{matrix} \epsilon \to 0 \\ \Lambda \to \infty \end{matrix} \right\}$ で finite となる積分で表す。*

$$A(D,\Lambda) = \sum_l g^{2l} \underbrace{\int d^D k_1 \cdots d^D k_l \; f(k_1, \cdots, k_l ; D, \Lambda)}_{\left\{ \begin{matrix} \epsilon \to 0 \\ \Lambda \to \infty \end{matrix} \right\} \text{ で finite な積分}}$$

∵②

$\epsilon \to 0$, $\Lambda \to \infty$ の極限が交換すればよい。

積分を極座標で実行する。(cf. real emission の計算)

$$\int^\infty dk_1 \cdots dk_l \; \frac{K(k/\Lambda) \cdots}{k_1^{2+\epsilon} \, k_2^{2+\epsilon} \cdots}$$

動径変数

$\epsilon = 0$, $\Lambda = \infty$ のとき $k \to \infty$ で絶対収束

* このアルゴリズムを十分一般的な場合に構成できれば、証明が成立する。
次のようにすればよいだろう。まず $\Lambda \to \infty$ の場合にアルゴリズムを構成する。$\Lambda < \infty$ の場合には、余分に $\frac{\partial}{\partial k^\mu} K(k,\Lambda)$ の部分が残るが、その support は有界。その寄与も Λ が大きいときに bound がつく。

6. 状況証拠

27 June 1996

PHYSICS LETTERS B

ELSEVIER

Physics Letters B 379 (1996) 283–291

The analytical value of the electron $(g-2)$ at order α^3 in QED

S. Laporta [1], E. Remiddi [2]

Dipartimento di Fisica, Università di Bologna, and INFN, Sezione di Bologna, Via Irnerio 46, I-40126 Bologna, Italy

Received 15 February 1996
Editor: R. Gatto

Abstract

We have evaluated in closed analytical form the contribution of the three-loop non-planar "triple-cross" diagrams contributing to the electron $(g\text{-}2)$ in QED; its value, omitting the already known infrared divergent part, is

$$a_e(3-\text{cross}) = \frac{1}{2}\pi^2\zeta(3) - \frac{55}{12}\zeta(5) - \frac{16}{135}\pi^4 + \frac{32}{3}\left(a_4 + \frac{1}{24}\ln^4 2\right) + \frac{14}{9}\pi^2\ln^2 2 - \frac{1}{3}\zeta(3) + \frac{23}{3}\pi^2\ln 2 - \frac{47}{9}\pi^2 - \frac{113}{48}$$

This completes the analytical evaluation of the $(g\text{-}2)$ at order α^3, giving

$$a_e(3-\text{loop}) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3\left\{\frac{83}{72}\pi^2\zeta(3) - \frac{215}{24}\zeta(5) + \frac{100}{3}\left[\left(a_4 + \frac{1}{24}\ln^4 2\right) - \frac{1}{24}\pi^2\ln^2 2\right] - \frac{239}{2160}\pi^4 + \frac{139}{18}\zeta(3)\right.$$
$$\left. - \frac{298}{9}\pi^2\ln 2 + \frac{17101}{810}\pi^2 + \frac{28259}{5184}\right\} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3(1.181241456\ldots).$$

PACS: 12.20Ds; 13.40.Em; 06.20.Jr; 12.20Fv
Keywords: Quantum electrodynamics; Anomalous magnetic moment of the electron; Analytical evaluation of 3-loop radiative corrections

Following the work of Ref. [1] we have completed the evaluation in close analytical form of the contribution to the electron anomaly in three-loop QED due to the triple-cross graphs depicted in Fig. 1.

The results are

$$a_e(3-\text{cross}; 1a) = \frac{215}{24}\zeta(5) - \frac{1}{3}\pi^2\zeta(3) - \frac{53}{2160}\pi^4 + 4\left[\left(a_4 + \frac{1}{24}\ln^4 2\right) - \frac{1}{24}\pi^2\ln^2 2\right]$$
$$- \frac{1229}{144}\zeta(3) - \frac{7}{6}\pi^2\ln 2 + \frac{4165}{2592}\pi^2 - \frac{515}{864} + \frac{1}{2}\ln\lambda = \boxed{1.285068495\ldots} + \frac{1}{2}\ln\lambda, \tag{1}$$

$$a_e(3-\text{cross}; 1b) = -\frac{275}{24}\zeta(5) + \frac{29}{36}\pi^2\zeta(3) + \frac{43}{1080}\pi^4 - \frac{5}{6}\pi^2\ln^2 2 + \frac{623}{144}\zeta(3) + \frac{35}{9}\pi^2\ln 2$$
$$- \frac{1951}{648}\pi^2 - \frac{493}{864} = \boxed{-0.878968171\ldots}, \tag{2}$$

[1] E-mail: laporta@bo.infn.it.
[2] E-mail: remiddi@bo.infn.it.

PII S0370-2693(96)00439-X

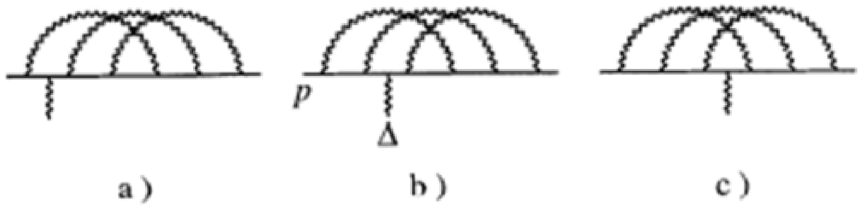


Fig. 1. The "triple-cross" graphs.

$$a_e(3-\text{cross};1c) = \frac{5}{12}\zeta(5) - \frac{4}{9}\pi^2\zeta(3) - \frac{161}{1080}\pi^4 + \frac{8}{3}\left(a_4 + \frac{1}{24}\ln^4 2\right) + \frac{32}{9}\pi^2\ln^2 2 + \frac{97}{12}\zeta(3)$$
$$+ \frac{20}{9}\pi^2\ln 2 - \frac{1043}{432}\pi^2 - \frac{1}{48} = \boxed{-0.026799490\ldots,} \tag{3}$$

from which

$$a_e(3-\text{cross}) = 2a_e(3-\text{cross};1a) + 2a_e(3-\text{cross};1b) + a_e(3-\text{cross};1c) = \frac{1}{2}\pi^2\zeta(3) - \frac{55}{12}\zeta(5)$$
$$- \frac{16}{135}\pi^4 + \frac{32}{3}\left(a_4 + \frac{1}{24}\ln^4 2\right) + \frac{14}{9}\pi^2\ln^2 2 - \frac{1}{3}\zeta(3) + \frac{23}{3}\pi^2\ln 2 - \frac{47}{9}\pi^2 - \frac{113}{48} + \ln\lambda$$
$$= \boxed{0.785401156\ldots} + \ln\lambda. \tag{4}$$

As it is customary in this kind of calculations, λ is the regularizing photon mass (in electron mass units), $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$, $\zeta(2) = \pi^2/6$, $a_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^4}$.

The above results are in excellent agreement with the numerical results

Photon mass
Pauli-Villars reg.

$$a_e(3-\text{cross};1a;\text{Ref. [2]}) = \boxed{1.291(7),} \quad a_e(3-\text{cross};1b;\text{Ref. [2]}) = \boxed{-0.882(10),}$$
$$a_e(3-\text{cross};1c;\text{Ref. [2]}) = \boxed{-0.021(100),} \quad a_e(3-\text{cross};\text{Ref. [3]}) = \boxed{0.785419(40),}$$

where the $\ln\lambda$'s are understood. As the previous graphs were the last graphs for which the analytical value of the anomaly was still missing, on account the previously known results [4–7] the complete analytical expression of the anomaly in three-loop QED can now be written as

$$a_e(3-\text{loop}) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \left\{ \frac{83}{72}\pi^2\zeta(3) - \frac{215}{24}\zeta(5) + \frac{100}{3}\left[\left(a_4 + \frac{1}{24}\ln^4 2\right) - \frac{1}{24}\pi^2\ln^2 2\right] - \frac{239}{2160}\pi^4 \right.$$
$$\left. + \frac{139}{18}\zeta(3) - \frac{298}{9}\pi^2\ln 2 + \frac{17101}{810}\pi^2 + \frac{28259}{5184} \right\} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 (1.181241456\ldots). \tag{5}$$

By using the best numerical value of $a_e(4-\text{loop}) = -1.557(70)$, Ref. [8], and

$$1/\alpha = 137.0359979(32),$$

Ref. [9], one finds

$$a_e(\text{th}) = 1159652201.2(2.1)(27.1) \times 10^{-12}, \tag{6}$$

(where the first error comes from $a_e(4-\text{loop})$, the second from α), to be compared with the experimental value, Ref. [10],

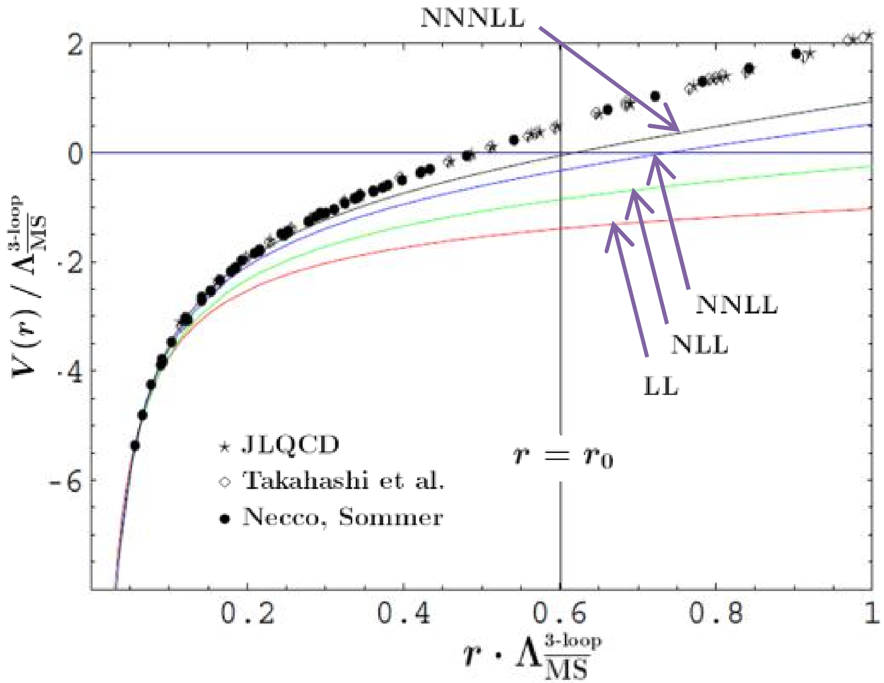
$$a_e(\text{exp}) = 1159652188.4(4.3) \times 10^{-12};$$

Interquark force

$$F(r) \equiv -\frac{d}{dr}V_{\rm QCD}(r)$$
$$\equiv -C_F\frac{\alpha_F(1/r)}{r^2}.$$

Renormalization-group equation: $\mu^2\frac{d}{d\mu^2}\alpha_F(\mu) = \beta_F(\alpha_F)$

$\Longrightarrow$ Due to the running of $\alpha_F(1/r)$, the attractive force $|F(r)|$ increases at large r.



Our building (outside)

One of our rooms

The runway of Sendai Airport littered with the debris of cars, planes and houses as a result of the tsunami, Iwanuma City (March 11, 4:00 pm).