Vector mesons on η’ domain walls

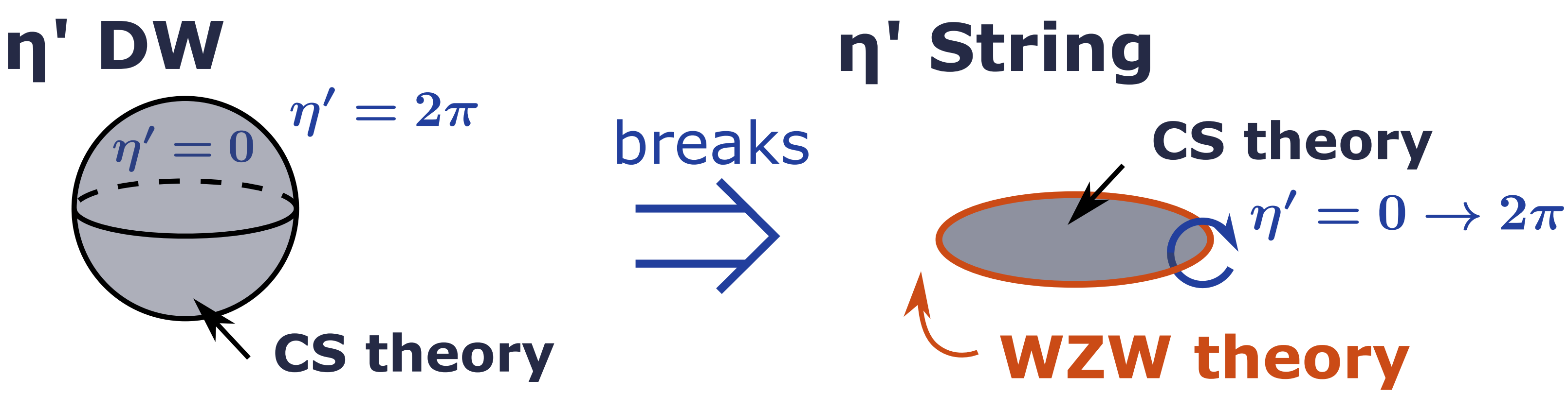
Ryutaro Matsudo

KEK Theory Center

JHEP 03 (2021) 023, arXiv:2011.14637

Seminar at Osaka University

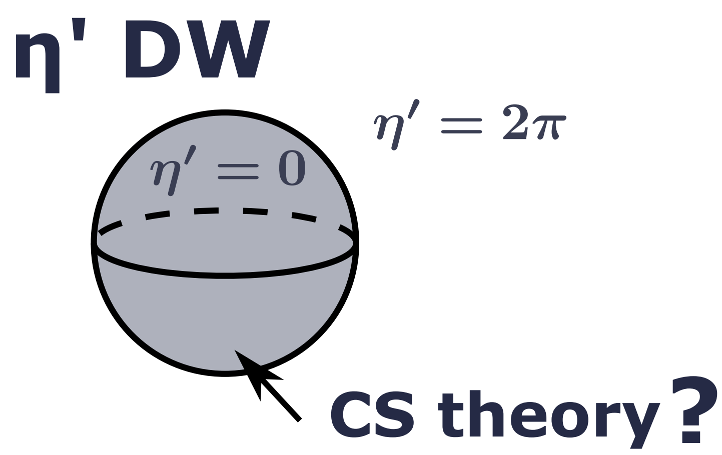
η’ String = Baryon



- η’ は Axial U(1) の “Goldstone boson”
- η’ の domain wall 上に(グルーオンの)CS理論を仮定
- η’ string (domain wall の端)にWZW理論
- WZWのスカラー場が巻数を持つとき、

η’ string は スピン N/2 の バリオン [Komargodski 2018]

Generalized ‘t Hooft anomaly



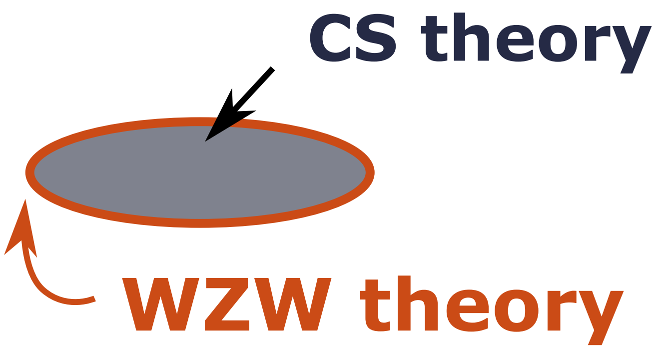
η’DW 上に本当にCS理論が乗るか？

θ の 2π−periodicity と、global symmetry のアノマリー

$$Z[A;\theta+2\pi] = e^{i\mathcal{A}[A]}Z[\theta]$$

の再現のために必要

η' String



= spin 1/N baryon?

$U(N_f)_V$の外場との結合をη’の有効理論から決定

⇒ η’ string の持つ量子数の決定。

スピン N/2 のバリオンに一致することを確認。

Necessity of the vector mesons

- $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ の外場を結合する際に、hidden local symmetry のゲージ場としてのベクター・メソンが必要になる。

Contents

1.

η’ domain walls and the CS theory

η' effective theory

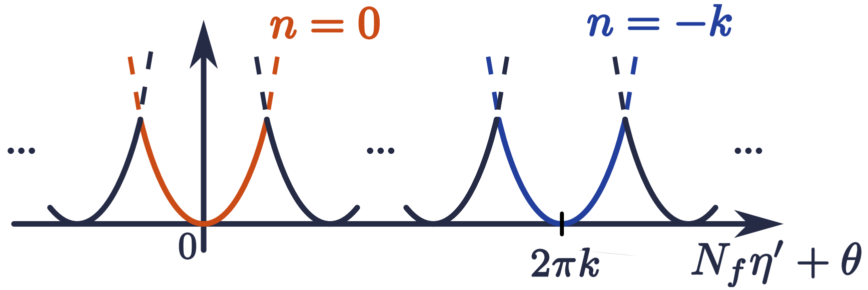
- N_f flavor massless QCD を考える。
- η'は $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ のphase。⇒ 2π-periodic
- Axial変換 $\psi \to e^{i\alpha\gamma^5}\psi$ に対し、$\eta' \to \eta' + 2\alpha$
- η'の有効理論は、

$$\mathcal{L}^{\text{eff}}_{\eta'} = \frac{f_{\eta'}^2}{2}|d\eta'|^2 + V(N_f\eta' + \theta)$$

$$V(N_f\eta' + \theta) = V(N_f\eta' + \theta + 2\pi)$$

- Large N_cでは、cusp potential ⇒ multi-branch

$$V(N_f\eta' + \theta) = \frac{f_{\eta'}^2}{2} m_{\eta'}^2 \min_{n\in\mathbb{Z}} (N_f\eta' + \theta + 2\pi n)^2$$



θ term and background fields

- 背景ゲージ場を結合すると、θ の2π−periodicity が破れることがある。
- 外場があると、分数インスタントンが可能になることによる。
- 外場は、共変微分を以下にして入れる。

$$D\psi = (d - ia - iA_V - iA_f)\psi$$
$$a \in \mathfrak{su}(N_c), \quad A_V \in \mathfrak{u}(1), \quad A_f \in \mathfrak{su}(N_f)$$

- カウンター項を足して、QCDの θ 項を以下にする。

$$\mathcal{L}_\theta = \theta \frac{1}{8\pi^2}\left(\mathrm{tr}\, f^2 + \boldsymbol{\frac{N_c}{N_f}\,\mathbf{tr}\, F_f^2 + N_c F_V^2}\right)$$

この時Axial 変換で、θ の定数部分の依存性は消せる。

⇒ 有効理論内で常に $\boldsymbol{N_f\eta' + \theta}$ の組であらわれる。

θ in the effective theory

- 有効理論において、θ の依存性を再現する必要がある。

- グルーオンはすでに積分されているので、代わりがいる:

$$\frac{1}{2\pi}\int dC^{(3)} = \frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}\, f^2 \mod 1$$

を満たす**外場**を使って、

$$\mathcal{L}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{topo}} = (N_f\eta' + \theta)\left(\frac{1}{2\pi}dC^{(3)} + \frac{N_f}{8\pi^2 N_c}\,\mathrm{tr}\, F_f^2 + \frac{N_c}{8\pi^2}F_V^2\right)$$

のようにすれば 良いが、

そのような $C^{(3)}$ を背景ゲージ場を使ってかけるか？

Extracting fractional part

- 取りうるインスタントン数：

$$\frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}\, f^2 \in \mathbb{Z}/N_c \qquad \frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}\, F_f^2 \in \mathbb{Z}/N_f$$

$$\underline{\int \left(\frac{N_f}{8\pi^2}\,\mathrm{tr}\, f^2 + \frac{N_c}{8\pi^2}\,\mathrm{tr}\, F_f^2 + \frac{N_c N_f}{8\pi^2} F_V^2 \right)} \in \mathbb{Z}$$

Index

- A_V を整数部分と分数部分に分けると、

$$A_V = \widehat{A}_V + \underline{\frac{1}{N_c}\widehat{A}_c} + \frac{1}{N_f}\widehat{A}_f, \quad \int d\widehat{A}_{V,c,f} \in 2\pi\mathbb{Z}$$

以下をグルーオン部分の代わりに用いることができる。

$$\boldsymbol{\frac{1}{2\pi} dC^{(3)} := \frac{1}{8\pi^2 N_c}(d\widehat{A}_c)^2}$$

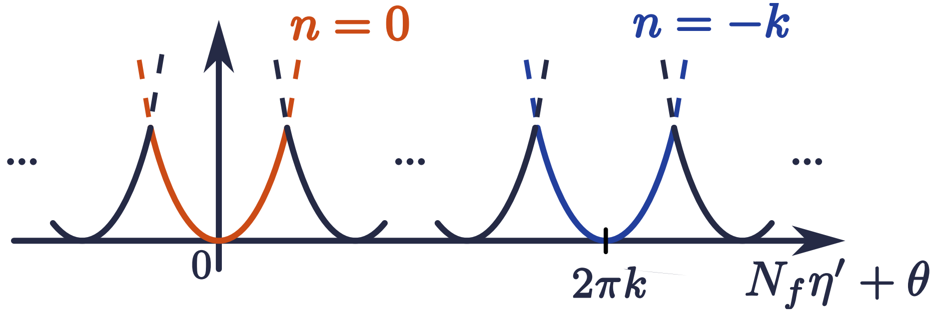
しかし、定義のredundancy のため、1-form ゲージ変換

$$\widetilde{A}_V \to \widetilde{A}_V - \lambda_c^{(1)} - \lambda_f^{(1)}, \quad \widehat{A}_c \to \widehat{A}_c + N_c \lambda_c^{(1)}, \quad \widehat{A}_f \to \widehat{A}_f + N_f \lambda_f^{(1)}$$

の下で作用は不変でなければならない。

Multi-branch structure

- $dC^{(3)}$ はローカルに 1-form ゲージ不変でないので、 η’ に直接結合できない。
- ポテンシャルのmulti-branch structure が必要。

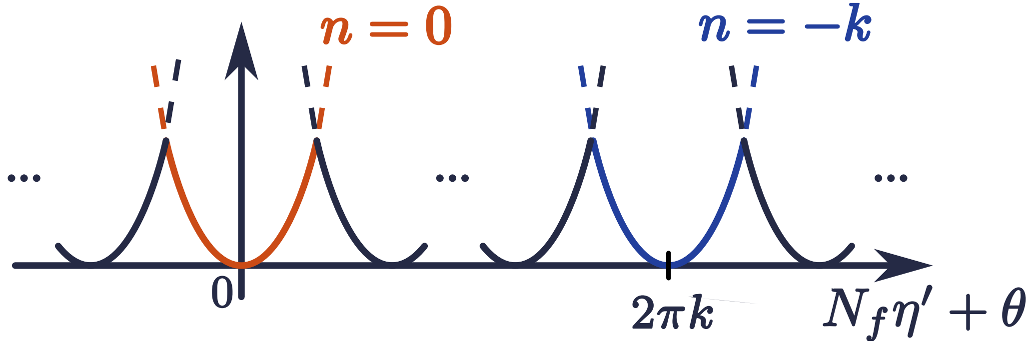


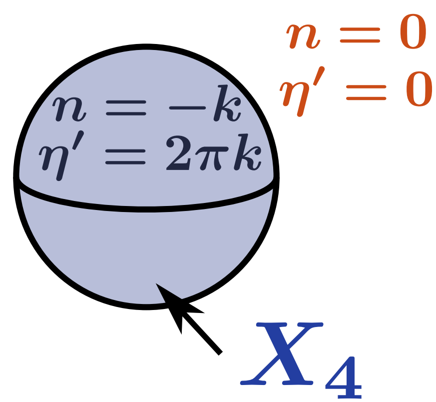
- nでラベルされるbranchに依存する項を導入。

$$\mathcal{L}^{\text{eff}}_{\text{topo+}} = (N_f\eta' + \theta)\left(\frac{N_f}{8\pi^2 N_c}\operatorname{tr} F_f^2 + \frac{N_c}{8\pi^2}F_V^2\right) + 2\pi i n \frac{1}{8\pi^2 N_c}\int (d\widehat{A}_c)^2$$

- これはゲージ変換に対し、2π の整数倍しか変わらないので、一見良いが…

Necessity of CS theory





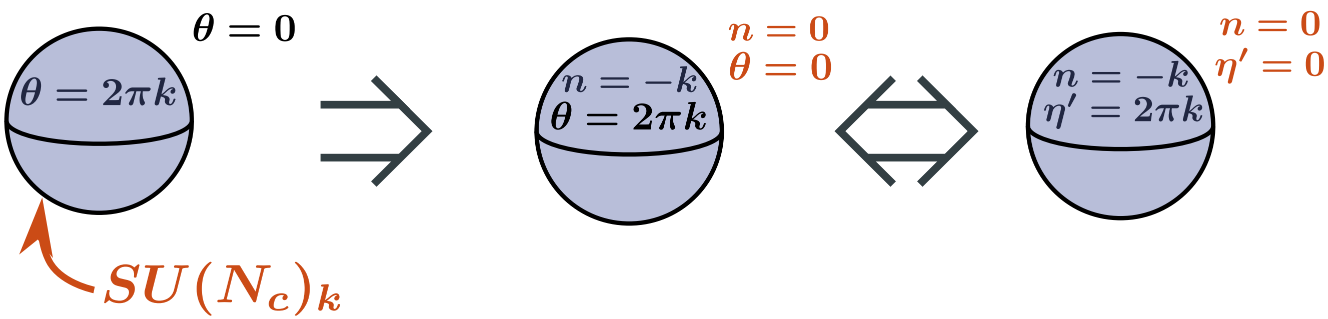
- η'のドメイン・ウォールがいる場合、ウォールの表面にゲージ依存性が残る。

$$2\pi i\frac{k}{8\pi^2 N_c}\int_{X_4}(d\widehat{A}_c)^2 \to \ldots + 2\pi i\frac{k}{8\pi^2}\int_{\partial X_4}(2\lambda_c^{(1)}d\widehat{A}_c + N_c\lambda_c^{(1)}d\lambda_c^{(1)})$$

⇒　これをキャンセルする理論がDW上に乗っていなければならない。

CS theory of gluons on the wall

UV **IR**



- 素朴には、UV理論の θ の interface 上のCS理論が周りで閉じ込めが起こっても残っていると思えばよい。

$$\theta \frac{1}{8\pi^2} \operatorname{tr} f^2 = -d\theta \frac{1}{2\pi} \mathrm{CS}(a) \to 2\pi k \, \mathrm{CS}(a)$$

$\Rightarrow \quad SU(N_c)_k$

- Level–rank dual から、$U(k)_{-N_c}$ がこれに等価。

$$i \frac{1}{4\pi} \int_{\partial X_4} \left(-N_c \operatorname{tr}(c dc - i \frac{2}{3} c^3) + 2 \operatorname{tr}(c) d\widehat{A}_c\right), \quad c \in \mathfrak{u}(k).$$

Answer

- トポロジカル項は、

$$\mathcal{L}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{topo}+} = i(N_f\eta' + \theta)\Big(\frac{N_f}{8\pi^2 N_c}\,\mathrm{tr}\,F_f^2 + \frac{N_c}{8\pi^2}F_V^2\Big) \;+ 2\pi i n \frac{1}{8\pi^2 N_c}(d\widehat{A}_c)^2$$

- DW上に、

$$i\frac{1}{4\pi}\int_{\partial X_4}(-N_c\,\mathrm{tr}(cdc - i\frac{2}{3}c^3) + 2\,\mathrm{tr}(c)d\widehat{A}_c), \quad c \in \mathfrak{u}(k).$$

Comments

- ロジカルには、ほかの可能性がある。
  例えば $\gcd(N_c, N_f) = 1$ 時は、ダイナミカル
  自由度がDWに乗らない可能性もある。
- ラージ N_c の時は、CSが乗ると言える。
  - ラージ N_c では、有効理論のグルーオン部分は、θ を $N_f \eta' + \theta$ におき替えることを除き、 ヤン＝ミルズと同じ。
  - ヤン＝ミルズは、θ のinterface上にCS理論（等）が乗らなければならない。[Gaiotto et al. 2017]

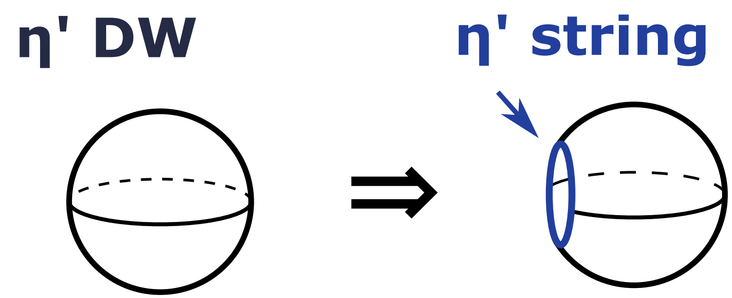
2.

η’ strings
=
spin N/2 baryons

η’ string

- η’ string = 穴あきDW
- IR 理論では singularity

  重い自由度によって正則化



  (emergent global 2-form symmetry $d d\eta' = 0$ が重い自由度で破れる)

  string 上では、カイラル対称性が回復している。

- $\eta' \sim \eta' + 2\pi$ より、$n \in N_f \mathbb{Z}$ のブランチは同一視される。

  実際、$\eta' = 2\pi,\ \theta = 0,\ n = -N_f$ のとき、

$$\int \mathcal{L}^{\text{eff}}_{\text{topo+}} = 2\pi i \int \Big(\frac{1}{8\pi^2 N_c} \operatorname{tr} F_f^2 + \frac{N_c N_f}{8\pi^2} F_V^2 + \frac{N_f}{8\pi^2 N_c} (d\widehat{A}_c)^2 \Big) \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

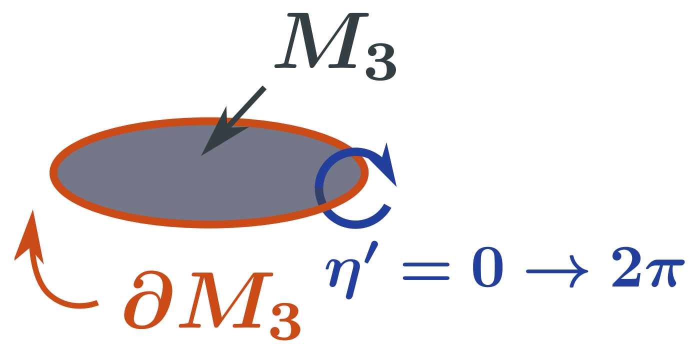
となり、DWの”中身”の選び方に作用の値が依存しない。

Theory on the wall and the string

- $\eta' = 0 \to 2\pi$ のDW上の理論は、

$$\frac{1}{4\pi}\int_{M_3}\left(-N_c \mathrm{tr}(cdc - i\frac{2}{3}c^3) + N_c \mathrm{tr}(\mathcal{A}_f d\mathcal{A}_f - i\frac{2}{3}\mathcal{A}_f^3)\right),$$

$$c \in \mathfrak{u}(N_f), \quad \mathcal{A}_f = A_V 1 + A_f \in \mathfrak{u}(N_f).$$



- ゲージ不変性のため、
  1. string 上（ウォールの端）に $\frac{N_c}{4\pi}\int_{\partial M_3}\mathrm{tr}(\mathcal{A}_f c)$
  2. 境界条件 $c_t = \mathcal{A}_t^f$
  3. 端で c が $\mathcal{A}_f$ と同じゲージ変換をする。

WZW on η' strings

- c_t を integrate out する ⇒ Gauss–law constraint

$$f_c = 0 \;\Rightarrow\; c = iWdW^{-1}, W \in U(N_f)$$

- constraint の解を代入すると、

$$\frac{N_c}{4\pi}\int_{\partial M_3} \mathrm{tr}\left(W\partial_y W^{-1} W\partial_t W^{-1} - 2iW\partial_y W^{-1}\mathcal{A}_t^f + \mathcal{A}_y^f\mathcal{A}_t^f\right) dydt$$
$$+ \frac{N_c}{4\pi}\int_{M_3} \mathrm{tr}\left(\frac{1}{3}(WdW^{-1})^3 - \mathcal{A}_f d\mathcal{A}_f + i\frac{2}{3}\mathcal{A}_f^3\right).$$

- バリオンは巻き数1の状態。それを作るオペレータは、

$$\rho(W)$$

ρ は N_c symmetric 表現 $\underbrace{\square\cdots\square}_{N_c}$

$$W = \begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{L}y} & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

の配位に対応

Reason for Nc symmetric

- 簡単のため、U(1)を考える:

$$S = \frac{N_c}{4\pi} \int dt dy \partial_y \phi \partial_t \phi$$

- 巻き数1の状態を作る
  ⇔ 作用を $\phi \to \phi + \frac{2\pi}{L}\mathrm{step}(t)$ で変換
  ⇔ 演算子としては、$e^{iN_c\phi}$
- Non-Abelian の時は、
  最高ウェイトが Nc 倍の表現 = Nc Symmetric 表現

3.

η' strings and vector mesons

Background field of chiral symmetry

- $\boldsymbol{SU(N_f)_L}$と$\boldsymbol{SU(N_f)_R}$の場を別々に結合させると、ウォール上に、

$$\frac{N_c}{4\pi}\int_Y [\mathrm{tr}(A_L dA_L - i\frac{2}{3}A_L^3) + \mathrm{tr}(A_R dA_R - i\frac{2}{3}A_R^3)]/2$$

(U(1)_A のアノマリーからわかる)

- ダイナミカルな $U(N_f)$ の場が c 一つしかないので、A_Lと A_R の両方について同じ方法でゲージ不変にすることはできない。

- ベクトルメソンをhidden local symmetryのゲージ場として入れると解決できる。

Hidden local symmetry

- パイオン場 $U \in U(N_f)$を二つに分ける。

$$U = \xi_L \xi_R^\dagger$$

- $\xi_{L,R} \to h\xi_{L,R},\ h \in U(N_f)$ のゲージ不変性がある。
- ゲージ場を導入し、ベクトルメソンとみなす：

$$D\xi_{L,R} := d\xi_{L,R} - iv\xi_{L,R} + i\xi_{L,R}\mathcal{A}_{L,R}.$$

- v はHiggs され、質量をえる。質量項を最小化するのは、

$$v = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_L^{\xi_L} + \mathcal{A}_R^{\xi_R}),$$

$$\mathcal{A}_{L,R}^{\xi_{L,R}} := \xi_{L,R}\mathcal{A}_{L,R}\xi_{L,R}^{-1} + i\xi_{L,R}d\xi_{L,R}^{-1}.$$

CS theory of vector mesons

- 結局ウォール・ストリング上の理論は、

$$\frac{1}{4\pi}\int_{M_3}\left[N_c\,\mathrm{tr}\left(cdc - i\frac{2}{3}c^3\right) - N_c\,\mathrm{tr}\left(vdv - i\frac{2}{3}v^3\right)\right] + \frac{N_c}{4\pi}\int_{\partial M_3}\mathrm{tr}(vc),$$

- hidden local symmetry で変換する。⇒ $\xi_{L,R}$ をかけると $SU(N_f)_{L,R}$ で変換する
- 4d ラグランジアンでは、

$$\mathcal{L}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{topo}} = \frac{N_c}{8\pi^2}\int \eta'\,\mathrm{tr}(f_v^2).$$

- $\eta' \to \eta' + 2\pi/N_f$ に対する変換性を保つために、

vのインスタントン数は、N_f の倍数でなければならない。

（外場のインスタントン数がゼロの時）

WZW term including vector mesons

- vを含むゲージ不変なトポロジカル項をもとのWZW項に足せる。(cf. [M. Harada & K. Yamawaki (2003)])

$$\Gamma_v := -i\frac{N_c}{16\pi^2}\int_{M^4}\sum_{i=1}^{4} c_i\mathcal{L}_i,$$

$$\mathcal{L}_1 = \mathrm{tr}(\widehat{\alpha}_L^3\widehat{\alpha}_R - \widehat{\alpha}_R^3\widehat{\alpha}_L), \quad \mathcal{L}_2 = \mathrm{tr}(\widehat{\alpha}_L\widehat{\alpha}_R\widehat{\alpha}_L\widehat{\alpha}_R), \quad \mathcal{L}_3 = \mathrm{tr}(f_v(\widehat{\alpha}_L\widehat{\alpha}_R - \widehat{\alpha}_R\widehat{\alpha}_L)),$$

$$\mathcal{L}_4 = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\widehat{\mathcal{F}}_L(\widehat{\alpha}_L\widehat{\alpha}_R - \widehat{\alpha}_R\widehat{\alpha}_L) - \widehat{\mathcal{F}}_R(\widehat{\alpha}_R\widehat{\alpha}_L - \widehat{\alpha}_L\widehat{\alpha}_R)\right),$$

$$\widehat{\mathcal{F}}_{L,R} := \xi_{L,R}\mathcal{F}_{L,R}\xi_{L,R}^{-1}, \quad \widehat{\alpha}_{L,R} := \mathcal{A}_{L,R}^{\xi_{L,R}} - v$$

- $\mathcal{L}_{\mathrm{topo}}^{\mathrm{eff}}$ を再現するには、 $c_1 = 2/3,\ c_2 = -1/3,\ c_3 = 1,\ c_4 = 1$
- 実験と一致: $c_1 + c_2 \simeq 1,\ c_3 \simeq c_4 \simeq 1$
- ただし、 c_j が定数でなく、カイラル凝縮等に依存する可能性がある。

4.

Physical implications

Physical implications

- ストリング上でvとcの変換性が同じ。

  ⇒ カイラル対称性が回復する点では、

  vがグルーオンの双対？
- カイラル転移温度付近では、η’ string がたくさんできる。⇒ cが伝搬し、vと区別できなくなる。
- vのinstanton数は $0 \bmod N_f$.

  ⇒ 相転移点近傍でも massive を示唆？

Summary

- θの2π-periodicityの破れを再現するには、η'の有効理論には、ドメイン・ウォールとその上のCS理論が必要。
- η'のストリング、すなわち端のあるウォールは、巻き数1のモードが励起しているとき、確かに、スピンN/2のバリオンの量子数をもつ。
- カイラル対称性の外場を結合すると、ベクター・メソンの必要性がわかる。

Future work

- 現象論的応用
  (chiral soliton lattice, quark-hadron continuity)
- SUSY等のduality がより明瞭な場合との関連
- 一般論：Goldstone 場のsingular な物体と重いベクトル場の関係

関連研究

R. Kitano, R. Matsudo, arXiv:2103.13639

モノポール背景中のQEDでは、フェルミオンはストリングとしてかける。