

**Target space entanglement
in
quantum mechanics
of
fermions and matrices**

杉下 宗太郎 (名古屋大)

arXiv:2105.13726 (accepted in JHEP)

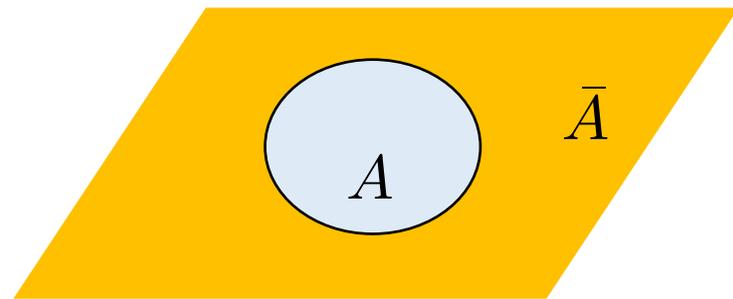
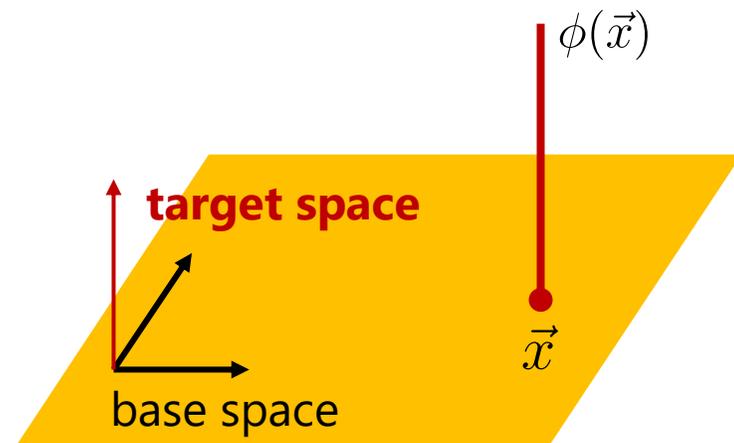
2021/7/27 阪大セミナー (オンライン)

■ 今日の話: target spaceの量子もつれ

■ Target space (標的空間) = 場が動く空間

cf. base space(底空間) = 場が定義されている空間

- 実スカラー場 $\phi(\vec{x}) \in \mathbb{R}$
- 場の理論でよく考えられている量子もつれは base spaceの量子もつれ



■ 今日の話: target spaceの量子もつれ

■ Target space (標的空間) = 場が動く空間

cf. base space(底空間) = 場が定義されている空間

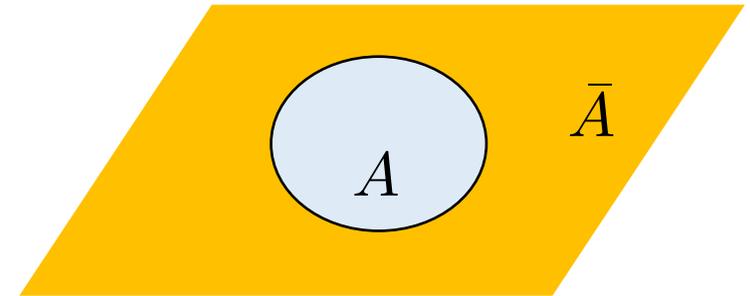
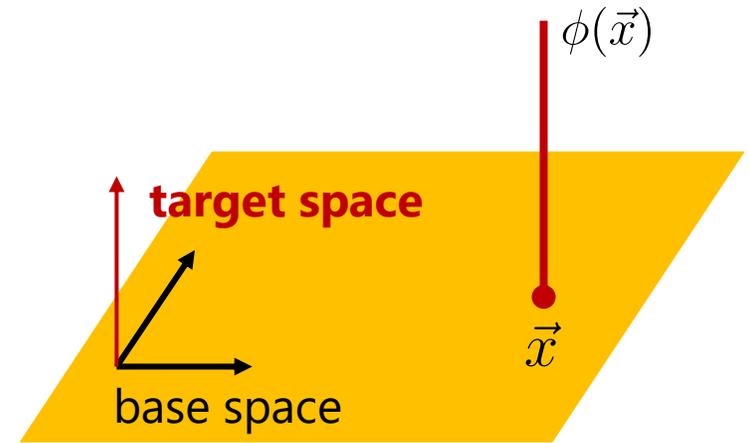
- 実スカラー場 $\phi(\vec{x}) \in \mathbb{R}$

- 場の理論でよく考えられている量子もつれは base spaceの量子もつれ

➡ **target space**はあまり考えられていない

[Mazenc, Ranard (2019)], [Hampapura, Harper, Lawrence (2020)],
[Das, Kaushal, Mandal, Trivedi (2020)], [Das, Kaushal, Liu, Mandal, Trivedi (2020)]

- 弦理論: base spaceではなく **target space**が私達の住む空間 $X^\mu(\sigma)$
(world-sheet)



■ 今日の話: target spaceの量子もつれ

- 量子もつれはホログラフィーの観点でも重要 笠-高柳
重力理論の量子もつれ 笠-高柳の量子補正, アイランド
- (1+0)次元の場の理論 (= 量子力学) $\phi(t, \vec{x})$ base spaceなし

例: **BFSS模型 (行列量子力学) = M理論**

base spaceの量子もつれはない。target spaceは？

- 手始めに、行列1個の一番簡単な行列量子力学を考えた $L = \frac{1}{2} \text{tr} \dot{X}^2 - \text{tr} V(X)$
- 同種粒子(フェルミオン)の量子力学

■ Outline

■ Introduction

■ Target space EEの定義

EEの定義を拡張する

■ 同種粒子の量子力学の場合

特にフェルミオン

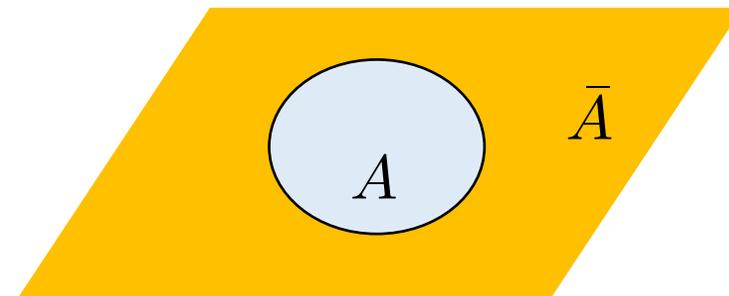
■ 具体例

一次元自由フェルミガス

■ Introduction

■ 場の量子論の(base space)エンタングルメントエントロピー

面積則 $S \sim \frac{\text{Area}}{\epsilon^{d-2}}$ 紫外発散



■ 量子重力の(base space)エンタングルメントエントロピー

予想 $S \sim \frac{\text{Area}}{\ell_p^{d-2}}$ 紫外有限 [Bianchi-Myers (2012)]

- Bekenstein-Hawking $S = \frac{\text{Area}}{4G}$
- Newton定数のくりこみ

一例： 2D string = (c=1)-matrix model

finite NでEEは確かに有限 [Das (1995)], [Hartnoll, Mazenc (2015)]

■ 提案

■ 量子重力の(base space) EE $S \sim \frac{\text{Area}}{\ell_p^{d-2}}$

● ホログラフィックな理論で、この量をどう定義する？

• 笠-高柳 極小曲面にしか使えない

• base spaceがない場合もある BFSS $L = \frac{1}{2g} \text{tr} [(D_t X^I)^2 + \dots]$

■ 提案

■ 量子重力の(base space) EE $S \sim \frac{\text{Area}}{\ell_p^{d-2}}$

● ホログラフィックな理論で、この量をどう定義する？

• 笠-高柳 極小曲面にしか使えない

• base spaceがない場合もある BFSS $L = \frac{1}{2g} \text{tr} [(D_t X^I)^2 + \dots]$

● 新しい提案 [Das, Kaushal, Mandal, Trivedi (2020)], see also [Das, Kaushal, Liu, Mandal, Trivedi (2020)]

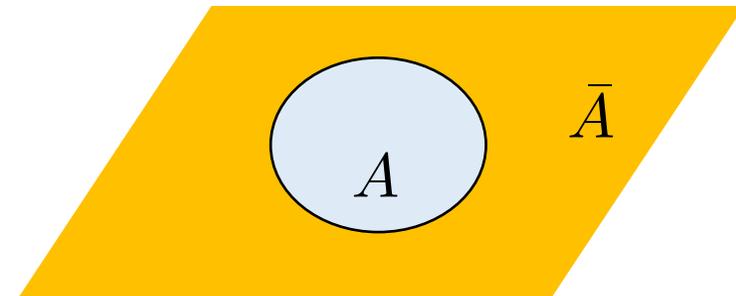
base space EE in QG = target space EE in dual theory

◆ target space EE was proposed by [Mazenc, Ranard (2019)]
motivated by [Das (1995)], [Hartnoll, Mazenc (2015)]

■ target space EEの定義？

- 普通のbase space EE $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}}$, ($\mathcal{H}_A = \otimes_{x \in A} \mathcal{H}_x$, $\mathcal{H}_{\bar{A}} = \otimes_{x \in \bar{A}} \mathcal{H}_x$)

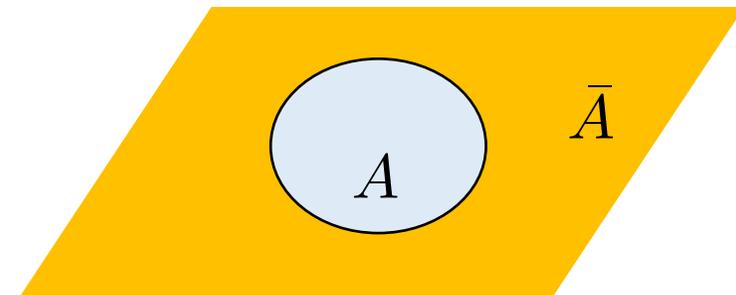
密度行列 $\rho \rightarrow \rho_A = \text{tr}_{\bar{A}} \rho \rightarrow S_A = -\text{tr}_A \rho_A \log \rho_A$



■ target space EEの定義？

- 普通のbase space EE $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}}$, ($\mathcal{H}_A = \otimes_{x \in A} \mathcal{H}_x$, $\mathcal{H}_{\bar{A}} = \otimes_{x \in \bar{A}} \mathcal{H}_x$)

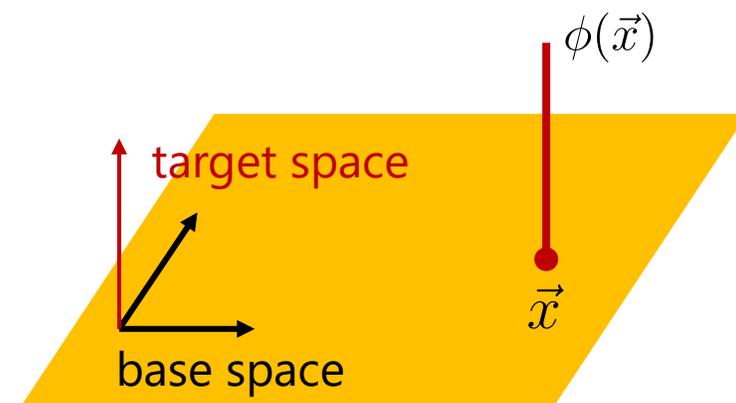
密度行列 $\rho \xrightarrow{\text{blue arrow}} \rho_A = \text{tr}_{\bar{A}} \rho \xrightarrow{\text{blue arrow}} S_A = -\text{tr}_A \rho_A \log \rho_A$



➤ 問題

ヒルベルト空間はtarget spaceに関してテンソル積の構造でない $\mathcal{H} \neq \otimes_{\phi \in \mathbb{R}} \mathcal{H}_\phi$

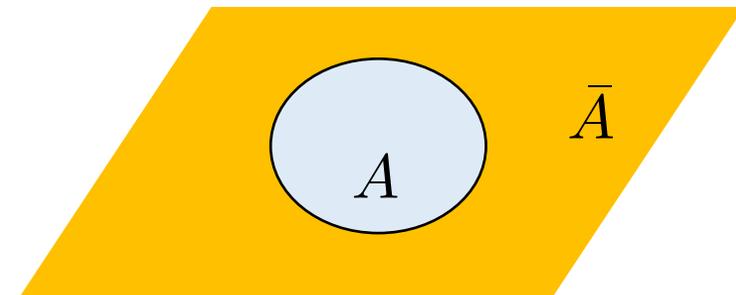
部分トレースどう計算？



■ target space EEの定義？

- 普通のbase space EE $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}}$, ($\mathcal{H}_A = \otimes_{x \in A} \mathcal{H}_x$, $\mathcal{H}_{\bar{A}} = \otimes_{x \in \bar{A}} \mathcal{H}_x$)

密度行列 $\rho \xrightarrow{\text{blue arrow}} \rho_A = \text{tr}_{\bar{A}} \rho \xrightarrow{\text{blue arrow}} S_A = -\text{tr}_A \rho_A \log \rho_A$



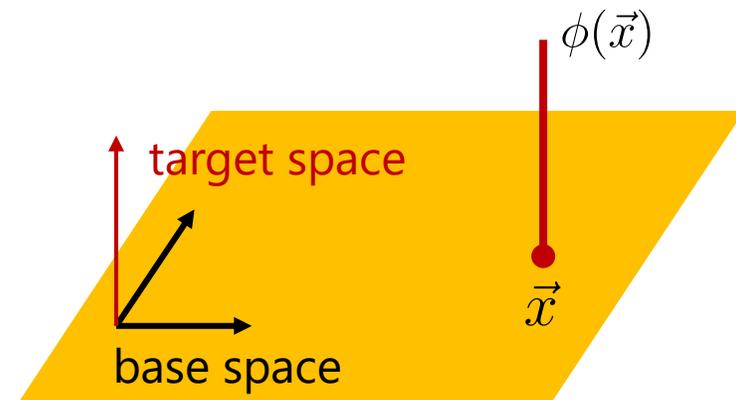
➤ 問題

ヒルベルト空間はtarget spaceに関してテンソル積の構造でない $\mathcal{H} \neq \otimes_{\phi \in \mathbb{R}} \mathcal{H}_\phi$

部分トレースどう計算？

- reduced density matrixの意味を考え直すと、
もっと一般の場合に使える定義が可能
(代数的場の理論、格子ゲージ理論等で使われている)

EEの一般化として、これ自体面白い



■ Outline

■ Introduction

■ Target space EEの定義

EEの定義を拡張する

■ 同種粒子の量子力学の場合

特にフェルミオン

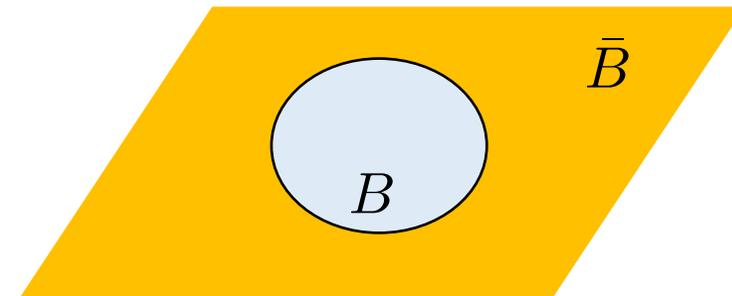
■ 具体例

一次元自由フェルミガス

■ 部分代数と reduced density matrix

- reduced density matrix $\rho_B = \text{tr}_{\bar{B}} \rho$

$$\text{tr}_B(\rho_B \mathcal{O}_B) = \text{tr}(\rho \mathcal{O}_B) \quad \forall \mathcal{O}_B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$$

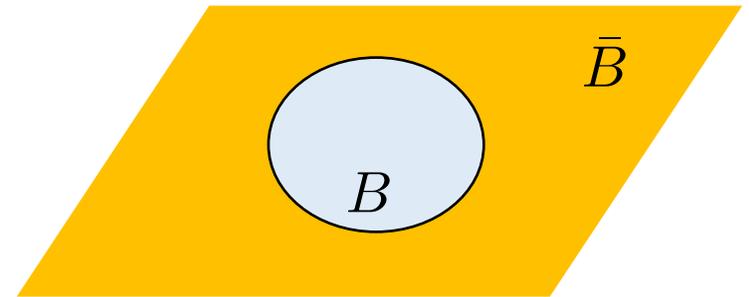


■ 部分代数と reduced density matrix

- reduced density matrix $\rho_B = \text{tr}_{\bar{B}} \rho$

$$\text{tr}_B(\rho_B \mathcal{O}_B) = \text{tr}(\rho \mathcal{O}_B) \quad \forall \mathcal{O}_B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$$

- B にだけ作用する演算子の集合 $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{H}_B) \otimes 1_{\bar{B}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$
部分代数



■ 部分代数と reduced density matrix

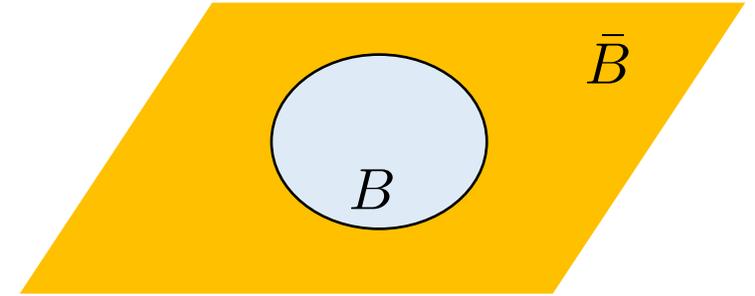
- reduced density matrix $\rho_B = \text{tr}_{\bar{B}} \rho$

$$\text{tr}_B(\rho_B \mathcal{O}_B) = \text{tr}(\rho \mathcal{O}_B) \quad \forall \mathcal{O}_B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$$

- B にだけ作用する演算子の集合 $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{H}_B) \otimes 1_{\bar{B}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$
部分代数

$$\rho_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A} \quad \text{s.t.} \quad \text{tr}(\rho_{\mathcal{A}} \mathcal{O}) = \text{tr}(\rho \mathcal{O}) \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{A}$$

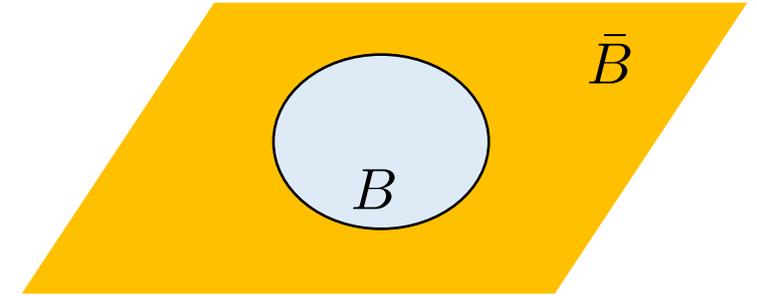
➡ $\rho_{\mathcal{A}} = \frac{1}{\dim \mathcal{H}_{\bar{B}}} \rho_B \otimes 1_{\bar{B}} \quad \text{unique!}$



■ 部分代数と reduced density matrix

- reduced density matrix $\rho_B = \text{tr}_{\bar{B}} \rho$

$$\text{tr}_B(\rho_B \mathcal{O}_B) = \text{tr}(\rho \mathcal{O}_B) \quad \forall \mathcal{O}_B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$$



- B にだけ作用する演算子の集合 $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{H}_B) \otimes 1_{\bar{B}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$
部分代数

$$\rho_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A} \quad \text{s.t.} \quad \text{tr}(\rho_{\mathcal{A}} \mathcal{O}) = \text{tr}(\rho \mathcal{O}) \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{A}$$

➡ $\rho_{\mathcal{A}} = \frac{1}{\dim \mathcal{H}_{\bar{B}}} \rho_B \otimes 1_{\bar{B}} \quad \text{unique!}$

- もっと一般の部分代数 \mathcal{A} でも同じ定義とする.

$$\rho_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A} \quad \text{s.t.} \quad \text{tr}(\rho_{\mathcal{A}} \mathcal{O}) = \text{tr}(\rho \mathcal{O}) \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{A}$$

➡ 部分代数ごとに“reduced density matrix”が定義できる!

■ ヒルベルト空間の分解

部分代数 $A \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$

定理：ヒルベルト空間は次の形にブロック分解可能

$$\mathcal{H} = \bigoplus_k \mathcal{H}_{A_k} \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}_k} \quad \text{s.t.} \quad A = \bigoplus_k \mathcal{L}(\mathcal{H}_{A_k}) \otimes 1_{\bar{A}_k}$$

一般にはテンソル積そのものにはならないが、テンソル積の直和には分解できる!

■ ヒルベルト空間の分解

部分代数 $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$

定理：ヒルベルト空間は次の形にブロック分解可能

$$\mathcal{H} = \bigoplus_k \mathcal{H}_{A_k} \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}_k} \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{A} = \bigoplus_k \mathcal{L}(\mathcal{H}_{A_k}) \otimes 1_{\bar{A}_k}$$

一般にはテンソル積そのものにはならないが、テンソル積の直和には分解できる!

- $\rho_{\mathcal{A}}$ の構成法 $\rho_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ s.t. $\text{tr}(\rho_{\mathcal{A}}\mathcal{O}) = \text{tr}(\rho\mathcal{O}) \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{A}$

■ ヒルベルト空間の分解

部分代数 $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$

定理：ヒルベルト空間は次の形にブロック分解可能

$$\mathcal{H} = \bigoplus_k \mathcal{H}_{A_k} \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}_k} \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{A} = \bigoplus_k \mathcal{L}(\mathcal{H}_{A_k}) \otimes 1_{\bar{A}_k}$$

一般にはテンソル積そのものにはならないが、テンソル積の直和には分解できる!

● $\rho_{\mathcal{A}}$ の構成法 $\rho_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A} \quad \text{s.t.} \quad \text{tr}(\rho_{\mathcal{A}} \mathcal{O}) = \text{tr}(\rho \mathcal{O}) \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{A}$

各ブロックへの射影 $\Pi_k \xrightarrow{\quad} p_k = \text{tr}(\Pi_k \rho \Pi_k), \quad \rho_k = \frac{1}{p_k} \Pi_k \rho \Pi_k \xrightarrow{\quad} \rho_{k,A} = \text{tr}_{\bar{A}_k} \rho_k$

$$\xrightarrow{\quad} \rho_{\mathcal{A}} = \bigoplus_k p_k \rho_{k,A} \otimes \frac{1_{\bar{A}_k}}{\dim(\mathcal{H}_{\bar{A}_k})}$$

■ シン・エンタングルメントエントロピーの定義

$$\rho_A = \bigoplus_k p_k \rho_{k,A} \otimes \frac{1_{\bar{A}_k}}{\dim(\mathcal{H}_{\bar{A}_k})}$$

on

$$\mathcal{H} = \bigoplus_k \mathcal{H}_{A_k} \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}_k}$$

$$p_k = \text{tr}(\Pi_k \rho \Pi_k), \quad \rho_k = \frac{1}{p_k} \Pi_k \rho \Pi_k$$

➡ 縮約密度行列

$$\rho_A = \bigoplus_k p_k \rho_{k,A}$$

$$\text{on } \mathcal{H}_A = \bigoplus_k \mathcal{H}_{A_k}$$

■ シン・エンタングルメントエントロピーの定義

$$\rho_A = \bigoplus_k p_k \rho_{k,A} \otimes \frac{1_{\bar{A}_k}}{\dim(\mathcal{H}_{\bar{A}_k})}$$

on

$$\mathcal{H} = \bigoplus_k \mathcal{H}_{A_k} \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}_k}$$

$$p_k = \text{tr}(\Pi_k \rho \Pi_k), \quad \rho_k = \frac{1}{p_k} \Pi_k \rho \Pi_k$$

➡ 縮約密度行列

$$\rho_A = \bigoplus_k p_k \rho_{k,A}$$

on $\mathcal{H}_A = \bigoplus_k \mathcal{H}_{A_k}$

➡

$$S_A(\rho) = -\text{tr}_A \rho_A \log \rho_A = S_A^{cl}(\rho) + S_A^q(\rho)$$

$$S_A^{cl}(\rho) = -\sum_k p_k \log p_k$$

← 古典確率分布 $\{p_k\}$ の Shannon エントロピー

$$S_A^q(\rho) = \sum_k p_k S(\rho_{k,A})$$

← 各セクターの EE を平均化したもの

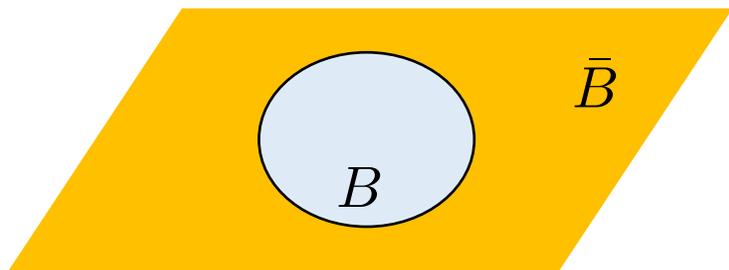
cf. symmetry resolved EE

■ ここまでのまとめ

- 使える**演算子が制限されている観測者**に対して、全体がわからないことによる不確定さの度合いとして**エントロピー**が定義できる。

■ ここまでのまとめ

- 使える**演算子が制限されている観測者**に対して、全体がわからないことによる不確定さの度合いとして**エントロピー**が定義できる。

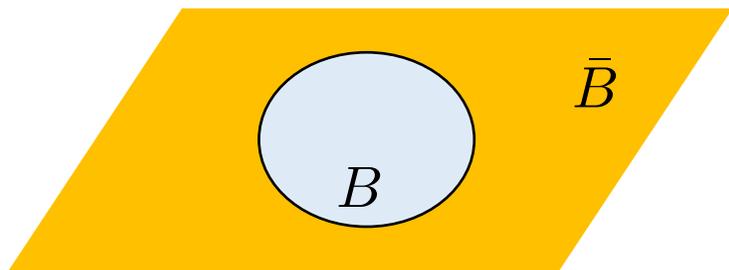


B 内のことしかわからない人にとってのエントロピー = 通常のエ

- 演算子の制限方法（部分代数のとり方）は色々

■ ここまでのまとめ

- 使える**演算子が制限されている観測者**に対して、全体がわからないことによる不確定さの度合いとして**エントロピー**が定義できる。



B内のことしかわからない人にとってのエントロピー = 通常のEE

➤ 演算子の制限方法（部分代数のとり方）は色々

- **一般的なエンタングルメントエントロピー**

$$S_A(\rho) = S_A^{cl}(\rho) + S_A^q(\rho)$$

$$S_A^{cl}(\rho) = - \sum_k p_k \log p_k, \quad S_A^q(\rho) = \sum_k p_k S(\rho_{k,A})$$

- **一般的なRenyiエントロピー** $S_A^{(n)}(\rho) = \frac{\log \text{tr}_A \rho_A^n}{1-n} = \frac{\log \left(\sum_k p_k^n \text{tr}_{A_k} \rho_{k,A}^n \right)}{1-n}$

■ 具体例：Qubit

横矢君のトーク in 阪大合宿@わっぱる

■ 1個のqubit $\mathcal{H} = \text{span}\{|+\rangle, |-\rangle\}$

$$\text{純粋状態 } |\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle$$

■ z方向のスピンしか測れない人 $\mathcal{A} = \text{span}\{1, \sigma_z\} = \left\{ c_+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ c_- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

■ 具体例：Qubit

横矢君のトーク in 阪大合宿@わっぱる

■ 1個のqubit $\mathcal{H} = \text{span}\{|+\rangle, |-\rangle\}$

$$\text{純粋状態 } |\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle$$

■ z方向のスピンしか測れない人 $\mathcal{A} = \text{span}\{1, \sigma_z\} = \left\{ c_+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ c_- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\mathcal{H} = \text{span}\{|+\rangle\} \oplus \text{span}\{|-\rangle\}$$



$$S_{\mathcal{A}}(\psi) = -p_+ \log p_+ - p_- \log p_- \quad \left(p_+ = \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad p_- = \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

エントロピー = 不確定度

■ 具体例：Qubit

横矢君のトーク in 阪大合宿@わっぱる

■ 1個のqubit $\mathcal{H} = \text{span}\{|+\rangle, |-\rangle\}$

$$\text{純粋状態 } |\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle$$

■ z方向のスピンしか測れない人 $\mathcal{A} = \text{span}\{1, \sigma_z\} = \left\{ c_+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ c_- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\mathcal{H} = \text{span}\{|+\rangle\} \oplus \text{span}\{|-\rangle\}$$

➡ $S_{\mathcal{A}}(\psi) = -p_+ \log p_+ - p_- \log p_- \quad \left(p_+ = \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad p_- = \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$

エントロピー = 不確定度

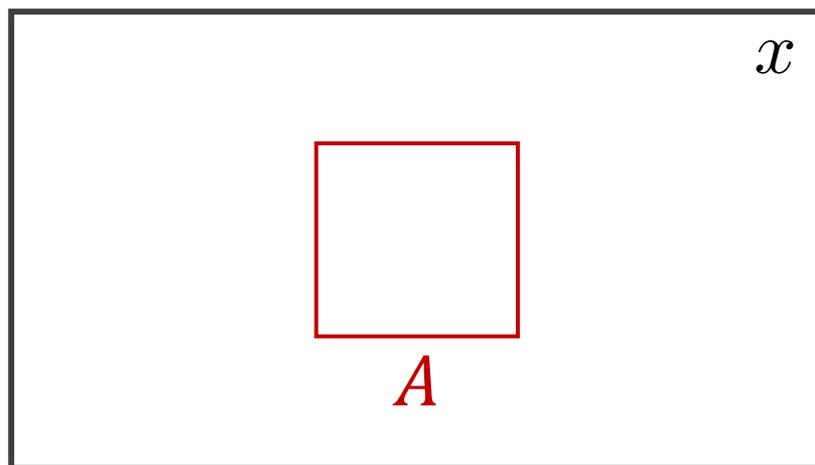
■ 何でも測れる人 $\mathcal{A} = \text{span}\{1, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ ➡ $S_{\mathcal{A}}(\psi) = 0$ ← 通常のvon Neumann entropy

(この人にとっては)純粋状態は曖昧さのない状態

■ 次の話

- (多)粒子の量子力学に対して **target space EE** を考える.

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + V(x)$$



■ Outline

■ Introduction

■ Target space EEの定義

EEの定義を拡張する

■ 同種粒子の量子力学の場合

特にフェルミオン

■ 具体例

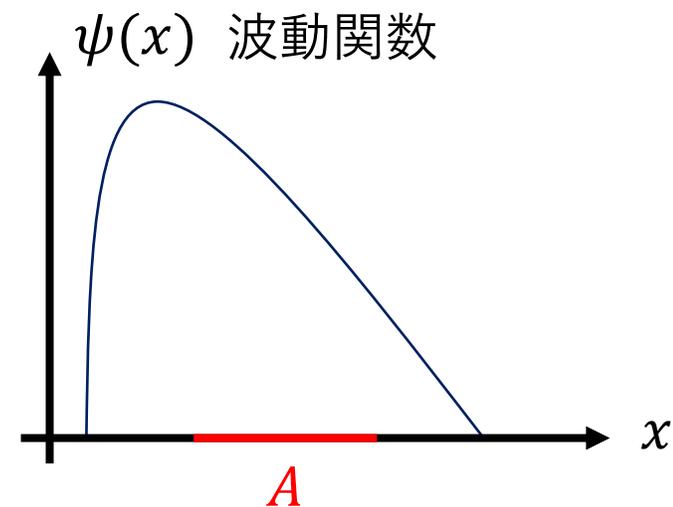
一次元自由フェルミガス

■ 一粒子の量子力学

■ 空間 M を動く粒子の量子力学

$$|\psi\rangle = \int_M dx \psi(x) |x\rangle$$

x についてテンソル積になっていない

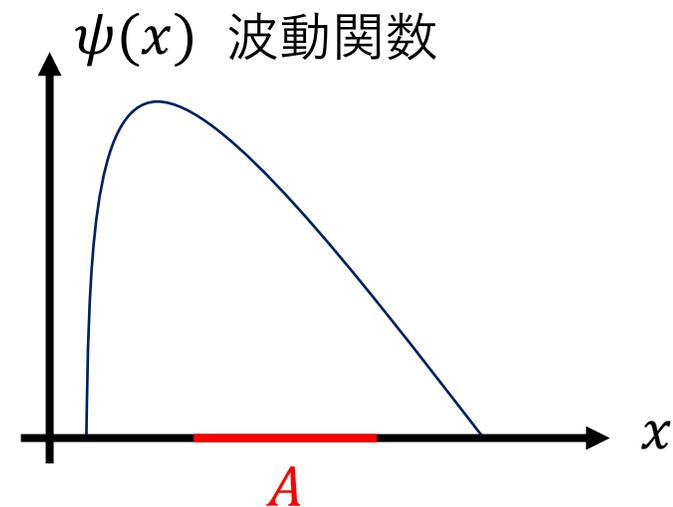


■ 一粒子の量子力学

■ 空間 M を動く粒子の量子力学

$$|\psi\rangle = \int_M dx \psi(x) |x\rangle$$

x についてテンソル積になっていない



● 部分領域 $A \subset M$ にだけ作用できる人にとってのEEを考える

こういう演算 $\int_A dx dx' O(x, x') |x\rangle\langle x'|$ だけできる人

部分代数 $\mathcal{A}(A) = \text{Span} \left[\left\{ |x\rangle\langle x'| \mid x, x' \in A \right\} \cup \left\{ \int_{\bar{A}} dx |x\rangle\langle x| \right\} \right]$

■ 一粒子の量子力学のEE

• A, \bar{A} への射影 $\Pi_A = \int_A dx |x\rangle\langle x|, \quad \Pi_{\bar{A}} = \int_{\bar{A}} dx |x\rangle\langle x|$

$\mathcal{H}_1 = \Pi_A \mathcal{H}$: 粒子が A にいる. $\mathcal{H}_0 = \Pi_{\bar{A}} \mathcal{H}$: 粒子が A にいない(\bar{A} にいる).

➡ $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0 \quad |\psi\rangle = \int_A dx \psi(x) |x\rangle + \int_{\bar{A}} dx \psi(x) |x\rangle$

■ 一粒子の量子力学のEE

- A, \bar{A} への射影 $\Pi_A = \int_A dx |x\rangle\langle x|, \quad \Pi_{\bar{A}} = \int_{\bar{A}} dx |x\rangle\langle x|$

$\mathcal{H}_1 = \Pi_A \mathcal{H}$: 粒子が A にいる.

$\mathcal{H}_0 = \Pi_{\bar{A}} \mathcal{H}$: 粒子が A にいない(\bar{A} にいる).

➡ $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0 \quad |\psi\rangle = \int_A dx \psi(x) |x\rangle + \int_{\bar{A}} dx \psi(x) |x\rangle$

- “縮約密度行列” $\rho_A = \bigoplus_k p_k \rho_{k,A} \longrightarrow S_{\mathcal{A}}(\rho) = -\text{tr}_A \rho_A \log \rho_A = S_{\mathcal{A}}^{cl}(\rho) + S_{\mathcal{A}}^q(\rho)$

■ 一粒子の量子力学のEE

- A, \bar{A} への射影 $\Pi_A = \int_A dx |x\rangle\langle x|$, $\Pi_{\bar{A}} = \int_{\bar{A}} dx |x\rangle\langle x|$

$\mathcal{H}_1 = \Pi_A \mathcal{H}$: 粒子がAにいる. $\mathcal{H}_0 = \Pi_{\bar{A}} \mathcal{H}$: 粒子がAにいない(\bar{A} にいる).

➡ $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0$ $|\psi\rangle = \int_A dx \psi(x) |x\rangle + \int_{\bar{A}} dx \psi(x) |x\rangle$

- “縮約密度行列” $\rho_A = \bigoplus_k p_k \rho_{k,A} \longrightarrow S_{\mathcal{A}}(\rho) = -\text{tr}_A \rho_A \log \rho_A = S_{\mathcal{A}}^{cl}(\rho) + S_{\mathcal{A}}^q(\rho)$

$$\left[\begin{array}{l} p_1 = \text{tr}(\Pi_A \rho \Pi_A), \quad \rho_{1,A} = \frac{1}{p_1} \Pi_A \rho \Pi_A \\ p_0 = \text{tr}(\Pi_{\bar{A}} \rho \Pi_{\bar{A}}), \quad \rho_{0,A} = 1 \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad \rho_A = p_0 + p_1 \rho_{1,A}$$

➡ $S_{\mathcal{A}}(\rho) = \underbrace{-\sum_{i=0}^1 p_i \log p_i}_{\text{classical}} - \underbrace{p_1 \text{tr}_1 \rho_{1,A} \log \rho_{1,A}}_{\text{quantum}}$ [Mazenc, Ranard (2019)]

■ 純粋状態の場合 $|\psi\rangle = \int_A dx \psi(x) |x\rangle + \int_{\bar{A}} dx \psi(x) |x\rangle$

$$S_{\mathcal{A}}(\rho) = - \sum_{i=0}^1 p_i \log p_i - p_1 \text{tr}_1 \rho_{1,A} \log \rho_{1,A}$$

$$p_1 = \int_A dx |\psi(x)|^2$$

粒子がAにいる確率

$$p_0 = \int_{\bar{A}} dx |\psi(x)|^2 = 1 - p_1$$

粒子がAにいない確率

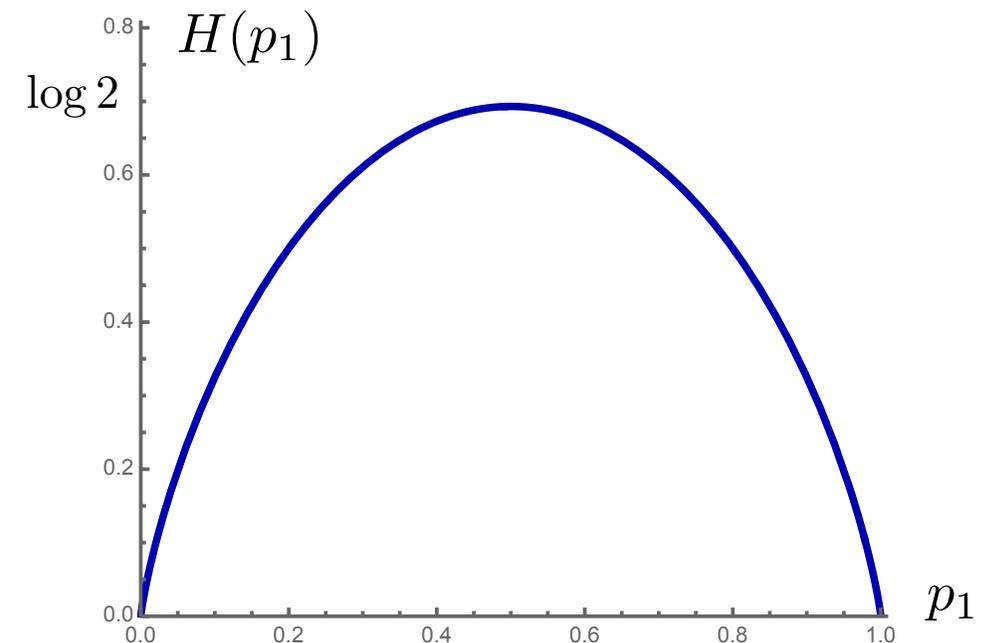
$\rho_{1,A}$

pure state on \mathcal{H}_1

$$S_{\mathcal{A}}(\psi) = -p_1 \log p_1 - (1 - p_1) \log(1 - p_1) =: H(p_1)$$

古典確率分布(Bernoulli分布) $\{p_1, 1 - p_1\}$ の

Shannonエントロピー



■ 同種粒子の多体系の量子力学

■ ボソン or フェルミオン $\psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}) = (\pm)^{\text{sgn } \sigma} \psi(x_1, \dots, x_N)$

• (反)対称セクターへの射影 P^\pm $\left[P^\pm |\psi_1\rangle \cdots |\psi_N\rangle = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S_N} (\pm)^{\text{sgn } \sigma} |\psi_{\sigma(1)}\rangle \cdots |\psi_{\sigma(N)}\rangle \right]$

■ 同種粒子の多体系の量子力学

■ ボソン or フェルミオン $\psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}) = (\pm)^{\text{sgn } \sigma} \psi(x_1, \dots, x_N)$

• (反)対称セクターへの射影 P^\pm $\left[P^\pm |\psi_1\rangle \cdots |\psi_N\rangle = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S_N} (\pm)^{\text{sgn } \sigma} |\psi_{\sigma(1)}\rangle \cdots |\psi_{\sigma(N)}\rangle \right]$

• A に k 個, \bar{A} に $N - k$ 個いる状態への射影 $\Pi_k(A) = \binom{N}{k} P^\pm \left(\Pi_A^{\otimes k} \otimes \Pi_{\bar{A}}^{\otimes (N-k)} \right) P^\pm$



$$\mathcal{H}^{(N)} = \bigoplus_{k=0}^N \mathcal{H}_k$$

$$\left[\mathcal{H}_k = \Pi_k(A) \mathcal{H}^{(N)} \right]$$

■ 同種粒子の多体系の量子力学

■ ボソン or フェルミオン $\psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}) = (\pm)^{\text{sgn } \sigma} \psi(x_1, \dots, x_N)$

• (反)対称セクターへの射影 P^\pm $\left[P^\pm |\psi_1\rangle \cdots |\psi_N\rangle = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S_N} (\pm)^{\text{sgn } \sigma} |\psi_{\sigma(1)}\rangle \cdots |\psi_{\sigma(N)}\rangle \right]$

• A に k 個, \bar{A} に $N - k$ 個いる状態への射影 $\Pi_k(A) = \binom{N}{k} P^\pm \left(\Pi_A^{\otimes k} \otimes \Pi_{\bar{A}}^{\otimes (N-k)} \right) P^\pm$

➡ $\mathcal{H}^{(N)} = \bigoplus_{k=0}^N \mathcal{H}_k \quad \left[\mathcal{H}_k = \Pi_k(A) \mathcal{H}^{(N)} \right]$

• 各セクターの確率 $p_k = \text{tr}[\Pi_k(A) \rho \Pi_k(A)]$

✓ pure state $p_k = \binom{N}{k} \int_A d^k y \int_{\bar{A}} d^{N-k} z |\psi(\vec{y}, \vec{z})|^2$

■ 同種粒子の多体系の量子力学のEE

$$\mathcal{H}^{(N)} = \bigoplus_{k=0}^N \mathcal{H}_k$$

- 各セクターの密度行列 $\rho_k = \frac{1}{p_k} \Pi_k(A) \rho \Pi_k(A)$
- 各セクターの縮約密度行列 $\rho_{k,A} = \text{tr}_{\bar{A}} \rho_k$ $\left[\rho_{k,A} = \frac{\binom{N}{k}}{p_k} \int_A d^k y d^k y' \int_{\bar{A}} d^{N-k} z \rho(\vec{y}, \vec{z}, \vec{y}', \vec{z}) \left| \vec{y} \right\rangle \left\langle \vec{y}' \right| \right]$

- Target space EE

$$S_A(\rho) = S_A^{cl}(\rho) + S_A^q(\rho)$$

$$S_A^{cl}(\rho) = - \sum_{k=0}^N p_k \log p_k, \quad S_A^q(\rho) = - \sum_{k=0}^N p_k \text{tr}_A \rho_{k,A} \log \rho_{k,A}$$

Shannon entropy

各セクターのEEの平均

■ フェルミオンの場合（行列量子力学の場合）

- Slater determinant $\psi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^{\text{sgn } \sigma} \chi_1(x_{\sigma(1)}) \cdots \chi_N(x_{\sigma(N)})$
 $\left[\int_M dx \chi_i(x) \chi_j^*(x) = \delta_{ij} \right]$

■ フェルミオンの場合（行列量子力学の場合）

- Slater determinant
$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in S_N} (-)^{\text{sgn } \sigma} \chi_1(x_{\sigma(1)}) \cdots \chi_N(x_{\sigma(N)})$$

$$\left[\int_M dx \chi_i(x) \chi_j^*(x) = \delta_{ij} \right]$$

- overlap matrix

$$X_{ij}(A) = \int_A dx \chi_i(x) \chi_j^*(x) \quad \text{一般に対角的でない}$$

➤ 固有値を λ_i とする ($0 \leq \lambda_i \leq 1$)

➡ $S_A^{cl}(\rho) = - \sum_{k=0}^N p_k \log p_k, \quad S_A^q(\rho) = - \sum_{k=0}^N p_k \text{tr}_A \rho_{k,A} \log \rho_{k,A}$ は λ_i で書ける.

■ フェルミオンのEEの古典部分

$$S_A^{cl}(\rho) = - \sum_{k=0}^N p_k \log p_k$$

- Poisson二項分布のShannonエントロピーと同じ.
 - N種類のコイン（それぞれ表の確率 λ_i , 裏の確率 $1 - \lambda_i$ ）
 - 表が k 個の確率 p_k

■ フェルミオンのEEの古典部分

$$S_A^{cl}(\rho) = - \sum_{k=0}^N p_k \log p_k$$

● Poisson二項分布のShannonエントロピーと同じ.

- N種類のコイン (それぞれ表の確率 λ_i , 裏の確率 $1 - \lambda_i$)
- 表が k 個の確率 p_k

● 表が出る確率の平均 $\frac{1}{N} \sum_i \lambda_i \equiv \lambda$ を固定したとき、エントロピーが最大になるのは $\lambda_1 = \dots = \lambda_N = \lambda$ (普通の二項分布) .

$$S^{cl}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \leq S^{cl}[\text{B}(N, \lambda)] = \frac{1}{2} \log[2\pi N \lambda(1 - \lambda)] + \frac{1}{2} + \mathcal{O}(1/N)$$

中心極限定理



$$S_A^{cl}(\rho) \lesssim \mathcal{O}(\log N)$$

■ フェルミオンのEE

- 古典+量子は簡単化

$$S_A(\rho) = S_A^{cl}(\rho) + S_A^q(\rho) = \sum_i H(\lambda_i)$$

$$H(\lambda) = -\lambda \log \lambda - (1 - \lambda) \log(1 - \lambda) \quad [\text{Bernoulli分布のShannonエントロピー}]$$

- 独立な N 個のBernoulli分布のShannonエントロピーと同じ

$$H(\lambda) \leq \log 2 \quad \text{よりEEの最大値は } N \log 2$$

- Renyiエントロピーも同様 $S_A^{(n)}(\rho) \leq N \log 2$

■ フェルミオンのEEの上限

$$S_A(\rho) \leq N \log 2$$

- 粒子数 N が有限ならば、**エントロピーは有限**.

注：ヒルベルト空間の次元は無限

- 古典部分 $S_A^{cl}(\rho) \lesssim \mathcal{O}(\log N)$ より大きい.

場の理論だと一般に紫外発散.
行列模型のEEは有限.

■ フェルミオンのEEの上限

$$S_A(\rho) \leq N \log 2$$

- 粒子数 N が有限ならば、**エントロピーは有限**.

注：ヒルベルト空間の次元は無限

場の理論だと一般に紫外発散.
行列模型のEEは有限.

- 古典部分 $S_A^{cl}(\rho) \lesssim \mathcal{O}(\log N)$ より大きい.

- 最大 $N \log 2$ になるのは、 $\lambda_1 = \dots = \lambda_N = \frac{1}{2}$ のとき.

➤ 可能な配位の数 2^N に等分配. $S = \log 2^N$ **示量的, 体積則**

- ✓ これは一般的な上限. 基底状態等のEEはもっと小さい (**準示量的, 面積則**)

一次元自由フェルミガス $S_A(\rho) \sim \frac{1}{3} \log N$ (あとで)

■ 第二量子化表示

$$S_A(\rho) = \sum_{i=1}^N H(\lambda_i) = -\text{tr}[X \log X + (1_N - X) \log(1_N - X)] \quad X : N \times N \text{ overlap matrix}$$

- 第二量子化表示 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N x \psi(x_1, \dots, x_N) c^\dagger(x_1) \cdots c^\dagger(x_N) |0\rangle$

■ 第二量子化表示

$$S_A(\rho) = \sum_{i=1}^N H(\lambda_i) = -\text{tr}[X \log X + (1_N - X) \log(1_N - X)] \quad X : N \times N \text{ overlap matrix}$$

- 第二量子化表示 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N x \psi(x_1, \dots, x_N) c^\dagger(x_1) \cdots c^\dagger(x_N) |0\rangle$

- 2点関数 $G_{x,y} = \langle \psi | c^\dagger(x) c(y) | \psi \rangle = \sum_{i=1}^N \chi_i^*(x) \chi_i(y) \quad \infty \times \infty \text{ matrix}$

- 普通のbase space EE $S_A^{2nd}(\rho) = -\text{tr}_A[G \log G + (1_A - G) \log(1_A - G)]$

■ 第二量子化表示

$$S_A(\rho) = \sum_{i=1}^N H(\lambda_i) = -\text{tr}[X \log X + (1_N - X) \log(1_N - X)] \quad X : N \times N \text{ overlap matrix}$$

- 第二量子化表示 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d^N x \psi(x_1, \dots, x_N) c^\dagger(x_1) \cdots c^\dagger(x_N) |0\rangle$

- 2点関数 $G_{x,y} = \langle \psi | c^\dagger(x) c(y) | \psi \rangle = \sum_{i=1}^N \chi_i^*(x) \chi_i(y) \quad \infty \times \infty \text{ matrix}$

- 普通のbase space EE $S_A^{2nd}(\rho) = -\text{tr}_A[G \log G + (1_A - G) \log(1_A - G)]$

$$S_A(\rho) = S_A^{2nd}(\rho)$$

target space EE in 1st picture = base space EE in 2nd picture w/ fixed N

■ ここまでは一般論

Target spaceやハミルトニアンを特定していない

■ Outline

■ Introduction

■ Target space EEの定義

EEの定義を拡張する

■ 同種粒子の量子力学の場合

特にフェルミオン

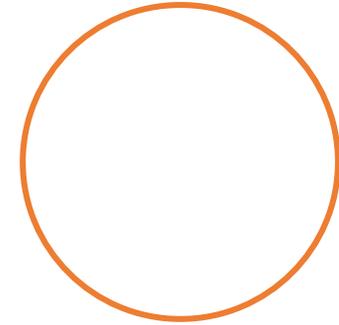
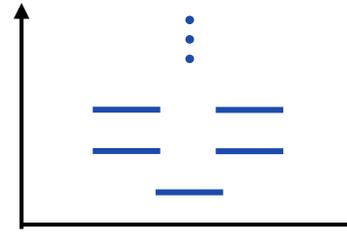
■ 具体例

一次元自由フェルミガス

■ 円周上のフェルミガス

- 一粒子固有関数 $\chi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{2\pi i}{L} n_i x}$ ($-L/2 \leq x \leq L/2$)

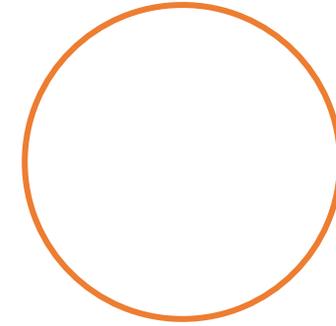
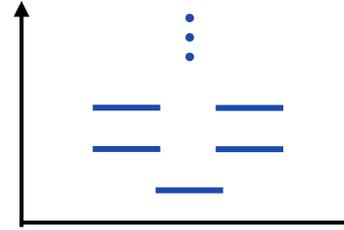
$$n_1 = 0, n_2 = -1, n_3 = 1, n_4 = -2, n_5 = 2, \dots$$



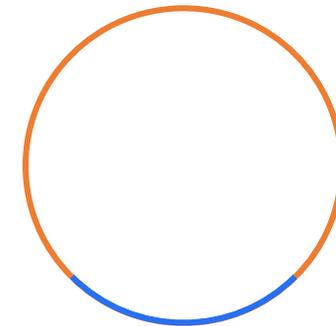
■ 円周上のフェルミガス

- 一粒子固有関数 $\chi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{2\pi i}{L} n_i x}$ $(-L/2 \leq x \leq L/2)$

$$n_1 = 0, n_2 = -1, n_3 = 1, n_4 = -2, n_5 = 2, \dots$$



- 基底状態 $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in S_N} (-)^{\sigma} \chi_1(x_{\sigma(1)}) \cdots \chi_N(x_{\sigma(N)})$ $(N = \text{奇数 とする})$

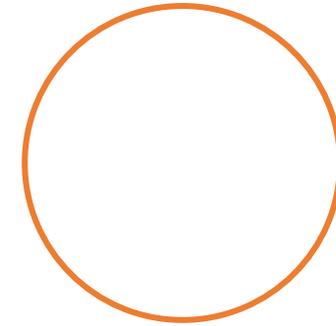
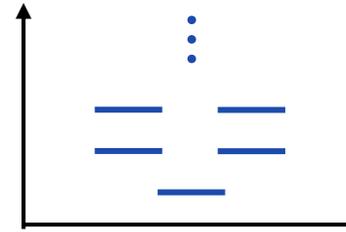


A

■ 円周上のフェルミガス

- 一粒子固有関数 $\chi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{2\pi i}{L} n_i x}$ ($-L/2 \leq x \leq L/2$)

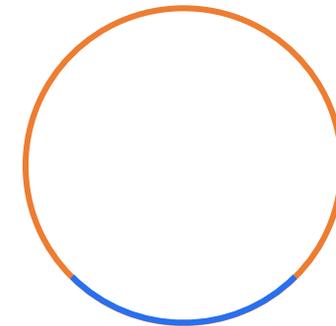
$$n_1 = 0, n_2 = -1, n_3 = 1, n_4 = -2, n_5 = 2, \dots$$



- 基底状態 $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in S_N} (-)^{\sigma} \chi_1(x_{\sigma(1)}) \cdots \chi_N(x_{\sigma(N)})$ ($N = \text{奇数 とする}$)

- overlap matrix $X_{ij}(A) = \int_A dx \chi_i(x) \chi_j^*(x)$

- EE $S(A) = -\text{tr}[X \log X + (1_N - X) \log(1_N - X)]$



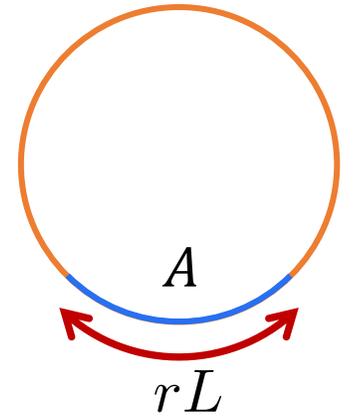
A

■ EE for a single interval

- 長さ rL の区間のEE (円周との比が r)

overlap matrix $X_{ij}(A) = \int_A dx \chi_i(x) \chi_j^*(x)$

➡ $S(A) = -\text{tr}[X \log X + (1_N - X) \log(1_N - X)]$

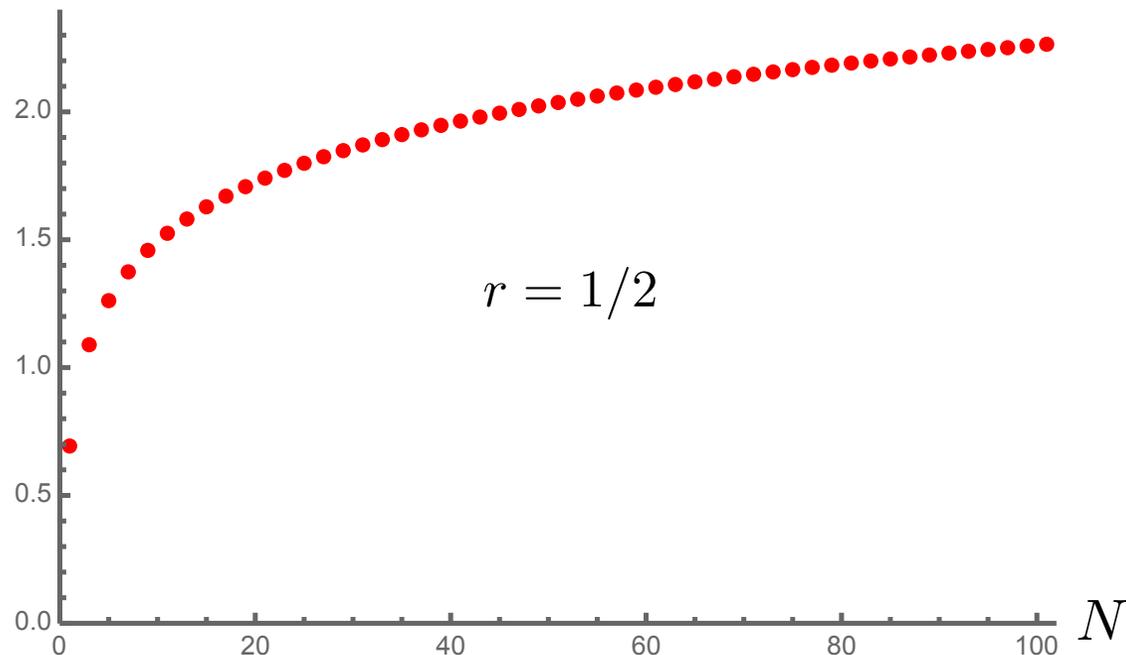
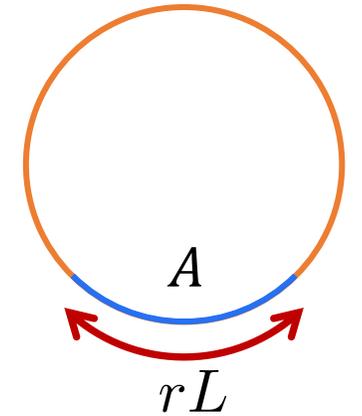


EE for a single interval

- 長さ rL の区間のEE (円周との比が r)

overlap matrix $X_{ij}(A) = \int_A dx \chi_i(x) \chi_j^*(x)$

➡ $S(A) = -\text{tr}[X \log X + (1_N - X) \log(1_N - X)]$



Not linear in N

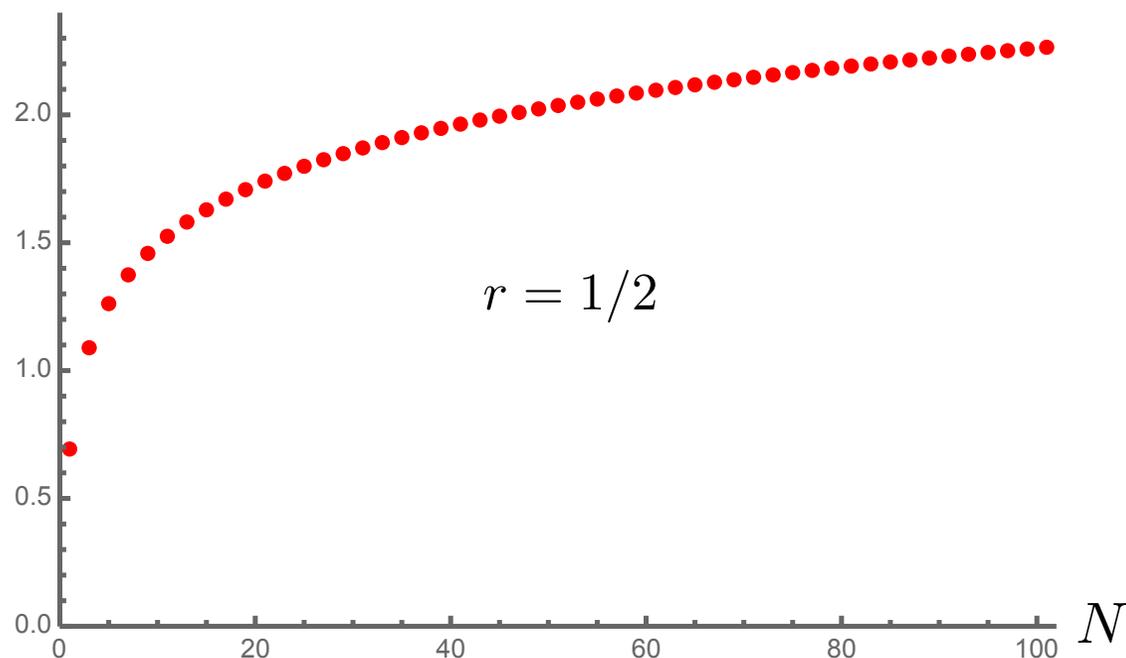
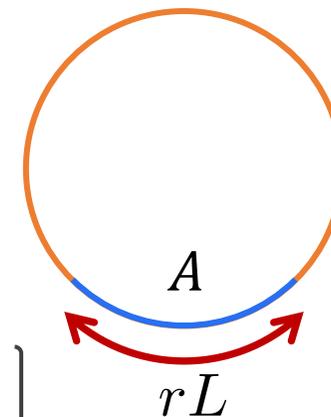
Large N

- N が大きいときの漸近形は解析的に計算可能 (XX模型と同じ計算に帰着)

[Jin, Korepin (2004), Calabrese, Essler (2010)]

$$S \sim \frac{1}{3} \log[2N \sin(\pi r)] + \Upsilon_1$$

$$\left[\Upsilon_1 = i \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{\pi w}{\cosh^2(\pi w)} \log \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + iw)}{\Gamma(\frac{1}{2} - iw)} \sim 0.495 \right]$$



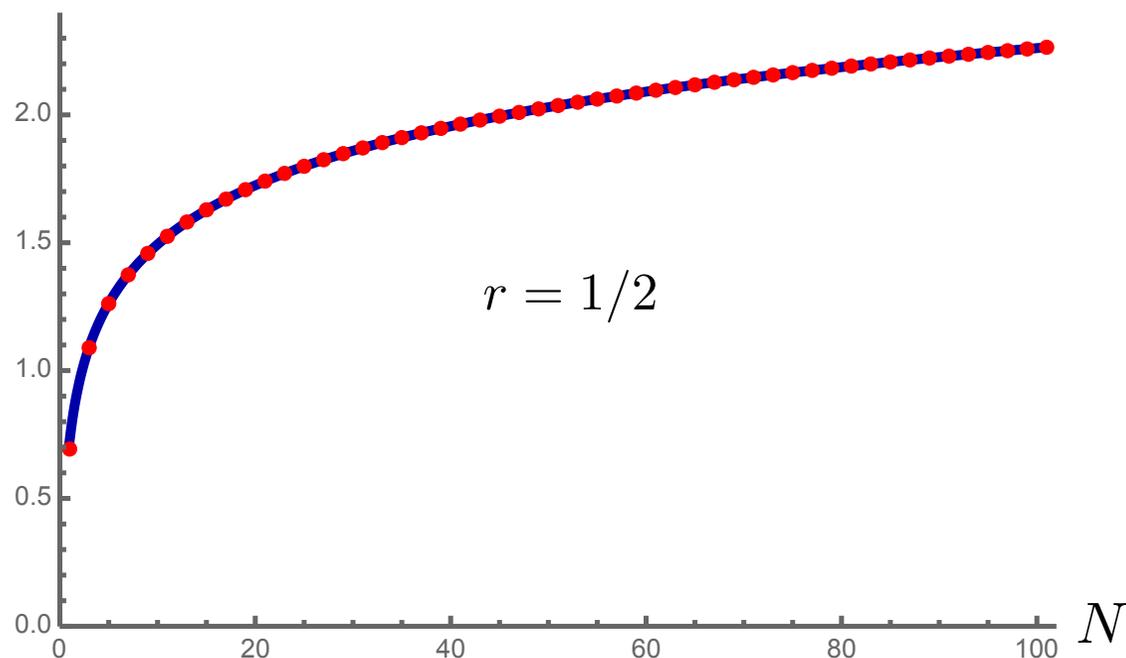
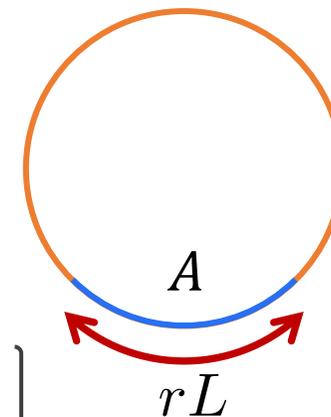
Large N

- N が大きいときの漸近形は解析的に計算可能 (XX模型と同じ計算に帰着)

[Jin, Korepin (2004), Calabrese, Essler (2010)]

$$S \sim \frac{1}{3} \log[2N \sin(\pi r)] + \Upsilon_1$$

$$\left[\Upsilon_1 = i \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{\pi w}{\cosh^2(\pi w)} \log \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + iw)}{\Gamma(\frac{1}{2} - iw)} \sim 0.495 \right]$$



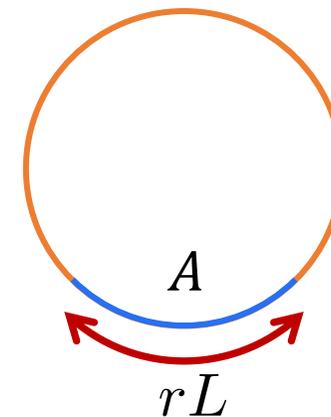
小さい N でも割と良い近似

■ 場の理論との比較

- N 粒子系 $S \sim \frac{1}{3} \log[N \sin(\pi r)] + \left(\frac{1}{3} \log 2 + \Upsilon_1 \right)$

- $c = 1$ CFT $S = \frac{1}{3} \log \left[\frac{L}{\delta} \sin(\pi r) \right] + \tilde{c}$

[δ : UV cutoff, \tilde{c} : 正則化に依存する定数]



注: XX模型の連続極限は $c = 1$ free fermion



$$N \sim \frac{L}{\delta}$$

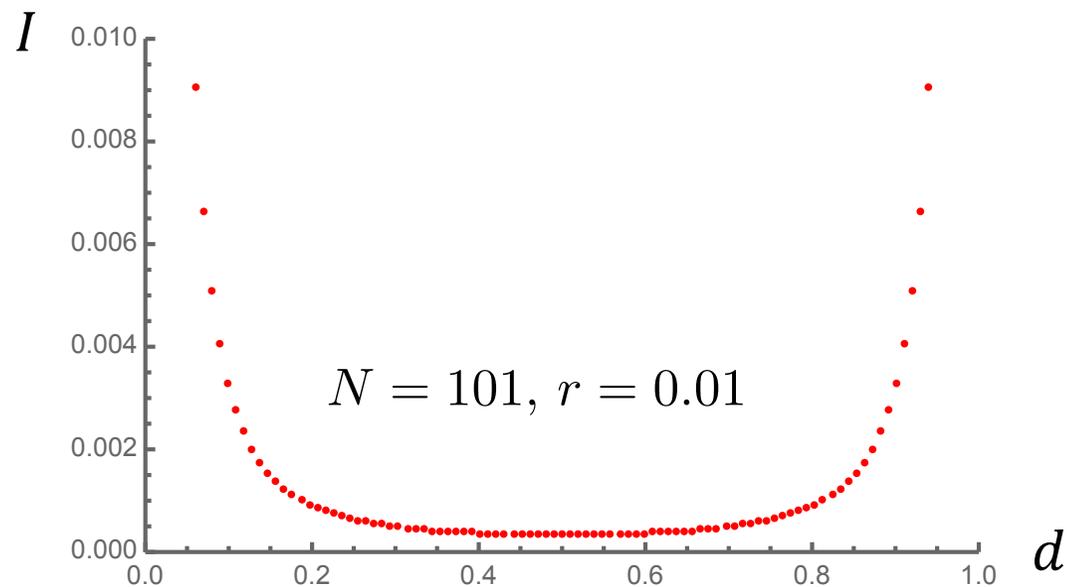
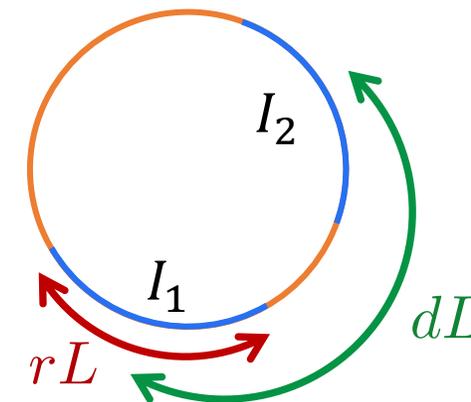
粒子数~カットオフ

[場の理論的にnon universalな定数 \tilde{c} も
量子力学的には意味ある?]

■ 相互情報量

- 2つの区間の**相互情報量**(mutual information)

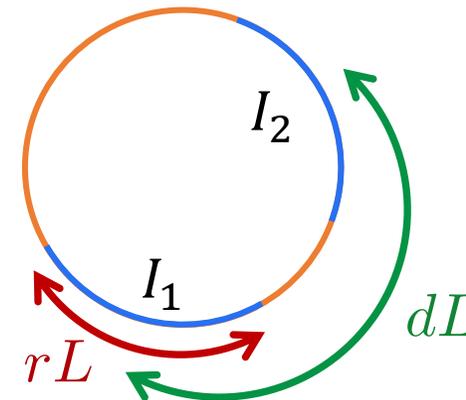
$$I(I_1; I_2) = S(I_1) + S(I_2) - S(I_1 \cup I_2) \quad (\text{領域間の相関})$$



■ 相互情報量

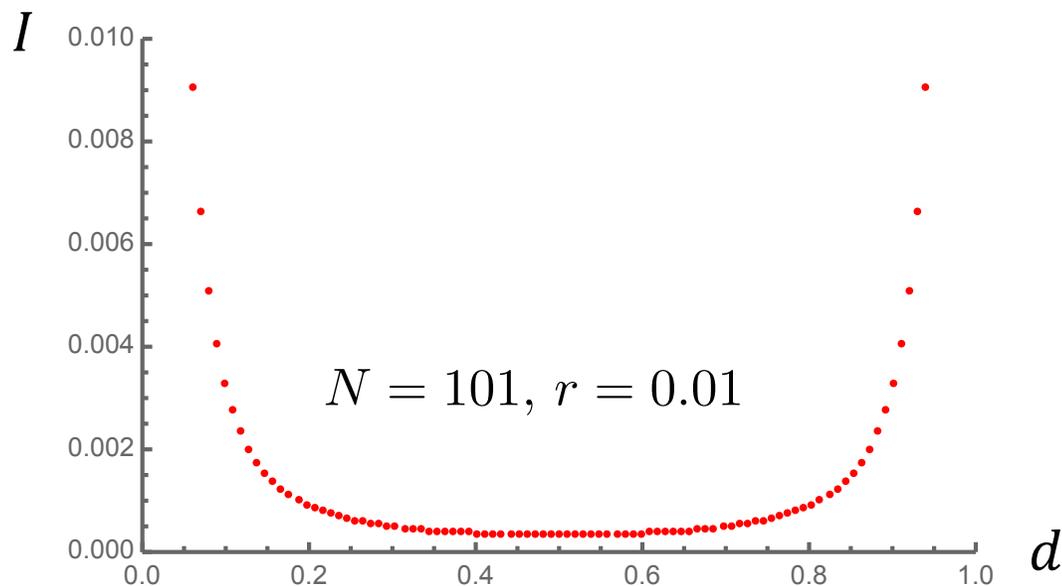
- 2つの区間の相互情報量(mutual information)

$$I(I_1; I_2) = S(I_1) + S(I_2) - \underline{S(I_1 \cup I_2)} \quad (\text{領域間の相関})$$



large N (Fisher-Hartwig予想)

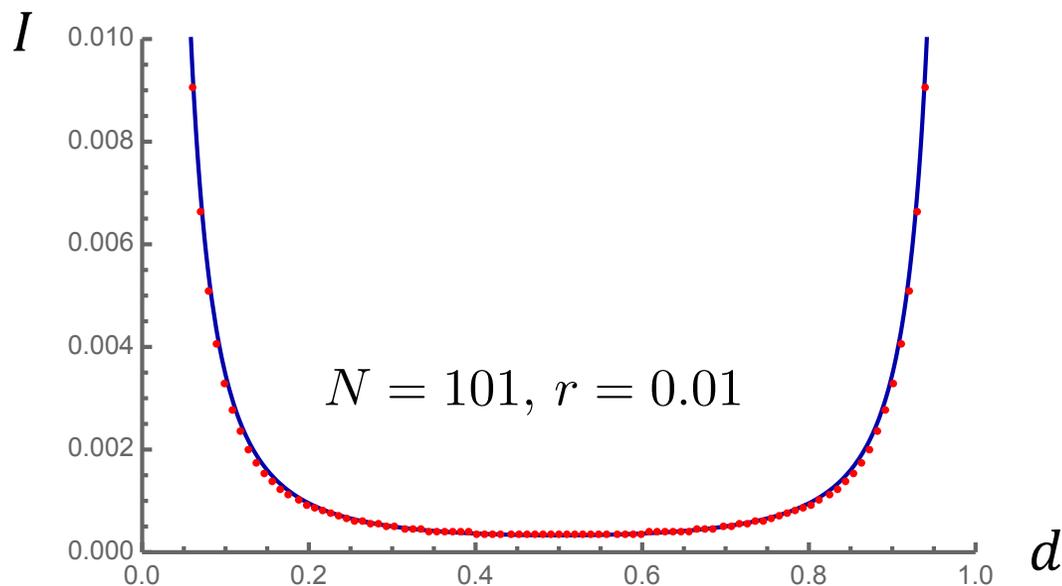
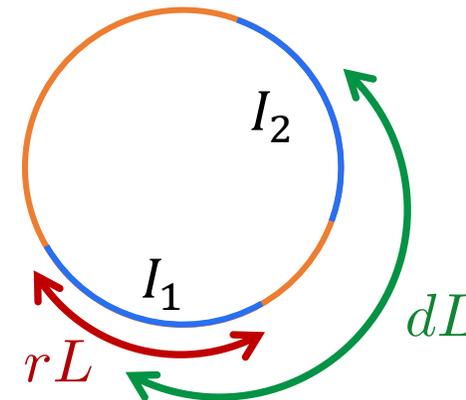
$$\frac{1}{3} \left[2 \log[2N \sin(\pi r)] + \log \frac{\sin[\pi(d+r)] \sin[\pi(d-r)]}{\sin^2(\pi d)} \right] + 2\Upsilon_1$$



■ 相互情報量

- 2つの区間の**相互情報量**(mutual information)

$$I(I_1; I_2) = S(I_1) + S(I_2) - S(I_1 \cup I_2) \quad (\text{領域間の相関})$$



解析形 (large N)

$$I(I_1; I_2) \sim \frac{1}{3} \log \frac{\sin^2(\pi d)}{\sin[\pi(d+r)] \sin[\pi(d-r)]}$$

$N \rightarrow \infty$ でも有限!

場の理論でも一般に紫外有限.

CFT (free compact boson at self-dual radius) の結果と一致 (なぜ?) [Calabrese, Cardy (2004)]

ま と め

■ Target spaceの量子もつれ

- 量子もつれの一般的定義

- 演算子の部分代数ごとにエントロピーが定義できる  色々応用がありそう

- 同種粒子の量子力学のtarget space EE

- EEの上限と有限性

- 一次元自由フェルミガス

- 数値計算とラージ N での解析計算

まだ基本的なことも調べられていない(はず)

高次元, 外場, 励起状態, 有限温度, 相互作用, 摂動論, ...

■ 展望

- target space EE in 1st picture = base space EE in 2nd picture

target space EE in **string theory** = base space EE in **SFT**?

target space EE in **field theory** = base space EE in *******?

- Multi-matrix QM

今回は行列1個の場合(自由フェルミオン), 複数の場合をやりたい

BFSS, fermionic, BMN, ...

量子力学ですらない場合? (IKKT)

- ホログラフィーとの関係

おまけ

■ 行列の固有値の量子力学 = フェルミオン多体系

one-matrix QM $L = \frac{1}{2} \text{tr} \dot{X}^2 - \text{tr} V(X)$

Schrödinger eq. $H\Psi(X) = E\Psi(X) \longrightarrow$ 対角化 $X = U^\dagger x U$ $x = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_N \end{pmatrix}$

➡ $\Psi(x, \cancel{U})$ 固有値について完全対称

➡ $-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \partial_i^2 (\Delta\Psi) + \sum_{i=1}^N V(x_i) \Delta\Psi = E \Delta\Psi$ $\left[\Delta(x) = \prod_{i<j} (x_i - x_j) \right]$

$\psi(x) \equiv \Delta(x)\Psi(x)$ 固有値について完全反対称

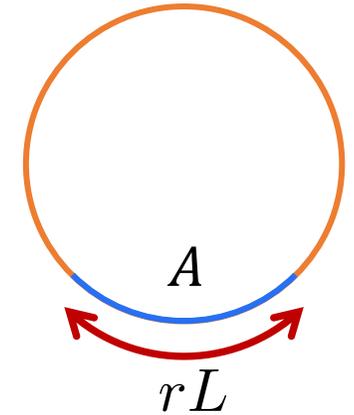
➡ $\left[\sum_{i=1}^N H(x_i) \right] \psi(x) = E\psi(x)$ $\left[H(x) = -\frac{1}{2} \partial_x^2 + V(x) \right]$

ポテンシャル V の互いに相互作用していない非相対論的フェルミオン

■ 詳細: EE for a single interval

- 長さ rL の区間のEE (円周との比が r) 適当に基底の順番を取り替えている

$$\text{overlap matrix } X_{ij}(A) = \int_A dx \chi_i(x) \chi_j^*(x) = \frac{\sin[\pi(i-j)r]}{\pi(i-j)}$$



➡ $S(A) = -\text{tr}[X \log X + (1_N - X) \log(1_N - X)]$

- スピン鎖模型(XX spin chain)のEEの計算と全く同じになる

$$H_{XX} = - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} [\sigma_l^x \sigma_{l+1}^x + \sigma_l^y \sigma_{l+1}^y] - h \sigma_l^z \right) \xleftrightarrow{\text{JW変換}} H_{TB} = - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(c_l^\dagger c_{l+1} + c_{l+1}^\dagger c_l + 2h \left[c_l^\dagger c_l - \frac{1}{2} \right] \right)$$

- gapless (critical) for $|h| < 1$

- 相関関数行列 $C_{ij} = \frac{\sin[k_F(i-j)]}{\pi(i-j)} \quad \left[k_F = \arccos |h| \right]$

$$S(A) = -\text{tr}_A[C_A \log C_A + (1_N - C_A) \log(1_N - C_A)]$$

A (Nsites)

■ Toeplitz行列

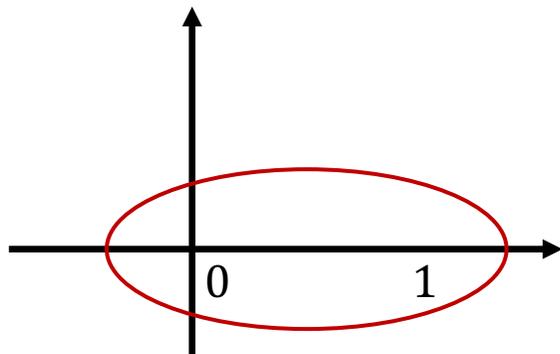
$$X_{ij} = \frac{\sin[\pi(i-j)r]}{\pi(i-j)}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ f & a & b & c & d \\ g & f & a & b & c \\ h & g & f & a & b \\ i & h & g & f & a \end{bmatrix}$$

➡ Toeplitz行列のLarge N での行列式に関する予想を使う (Fisher-Hartwig予想)

$$S(A) = - \sum_{i=1}^N H(\lambda_i) = \frac{1}{2\pi i} \oint dz H(z) \frac{d \log \det T(z)}{dz}$$

$$\left[\begin{array}{l} H(\lambda) = -\lambda \log \lambda - (1-\lambda) \log(1-\lambda) \\ T(z) \equiv z1_N - X \\ \det T(z) = \prod_{i=1}^N (z - \lambda_i) \end{array} \right]$$



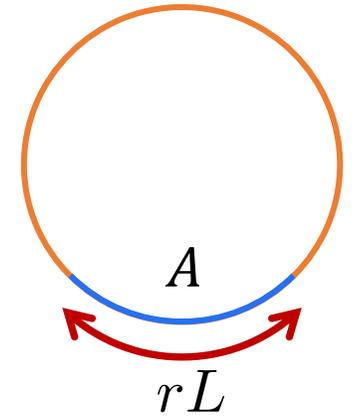
$\det T$ がわかればEEが計算可能

■ Renyi entropy for a single interval

- Renyi entropy も 同様

$$S^{(n)}(A) = \sum_{i=1}^N H^{(n)}(\lambda_i) = \frac{1}{2\pi i} \oint dz H^{(n)}(z) \frac{d \log \det T(z)}{dz}$$

$$\left[H^{(n)}(\lambda) = \frac{\log[\lambda^n + (1-\lambda)^n]}{1-n} \right]$$



$$S^{(n)} \sim \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \log[2N \sin(\pi r)] + \Upsilon_n$$

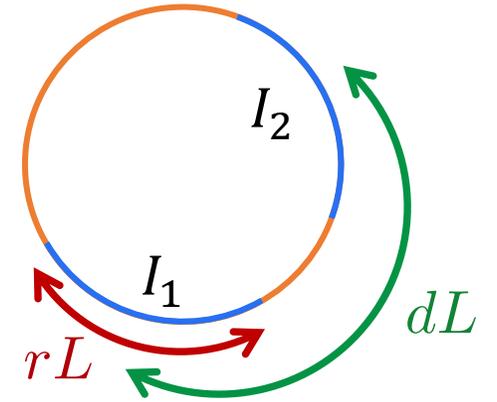
$$\Upsilon_n = \frac{n}{i(1-n)} \int_{-\infty}^{\infty} dw [\tanh(\pi n w) - \tanh(\pi w)] \log \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + iw)}{\Gamma(\frac{1}{2} - iw)}$$

Two intervals

- overlap matrix

$$X_{jk}(I_1 \cup I_2) = \frac{1}{\pi(j-k)} \{ \sin[\pi(j-k)(d+r)] - \sin[\pi(j-k)(d-r)] \}$$

Toeplitz行列



- large N

$$\det(z1_N - X) \simeq e^{-4\pi i N r \beta} [4N^2 \sin(\pi(d+r)) \sin(\pi(d-r))]^{-2\beta^2} \left[\frac{\sin(\pi r)}{\sin(\pi d)} \right]^{-4\beta^2} [G(1+\beta)G(1-\beta)]^4$$

$$\beta(z) = \frac{1}{2\pi i} \log \frac{z}{z-1}$$

Barnes G

- Renyi entropy (large N)

$$S^{(n)}(I_1 \cup I_2) \simeq \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left[2 \log[2N \sin(\pi r)] + \log \frac{\sin[\pi(d+r)] \sin[\pi(d-r)]}{\sin^2(\pi d)} \right] + 2\Upsilon_n$$