

## 電磁気学 1 演義 第 9 回 アドバンストクラス追加問題

1. 点  $r_0$  まわりの電磁場の全角運動量は,

$$\mathbf{J}(r_0, t) = \varepsilon_0 \int d^3r (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{E}(r, t) \times \mathbf{B}(r, t)) \quad (1)$$

で与えられる.

- (a) 以下のように,  $\mathbf{J}$  が  $r_0$  に依存する部分としない部分に分けられることを示せ. ただし,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  で,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  とし, 遠方で場は十分に速く減衰するものとする.

$$\mathbf{J}(r_0, t) = \varepsilon_0 \int d^3r [E_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \nabla A_j + \mathbf{E} \times \mathbf{A}] \quad (2)$$

(繰り返している添字は和をとる.)

ヒント: まず,  $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i = E_j \partial_i A_j - \partial_j (E_j A_i)$  を示す. (ここで  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  を用いる.)

- (b) 円偏光の平面波  $\mathbf{A} = A_0(\hat{x} \pm i\hat{y}) \exp i(kz - \omega t)$  ( $A_0$  は実定数) について,  $\mathbf{E} \times \mathbf{A}$  を計算せよ. ただし, 適当なゲージ変換で  $\phi = 0$  としてあるものとする.

ここで計算した  $\mathbf{J}$  の  $r_0$  に依存しない部分は, 光子の固有の角運動量 (スピン) に対応している. 上の結果から, 円偏光はスピンが進行方向に平行または反平行になっていることが分かる.  $r_0$  に依存する部分は通常の (軌道) 角運動量に対応する.