電磁気学１演義　　　　　　第 1 回　2017 年 4 月 11 日[1]

1. 次のベクトルの等式を証明しなさい。（a,b,c をまとめて一人で解答）
   (a) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}$
   (b) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$
   (c) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0$

2. 3 次元空間の場所 $\vec{r}=(x,y,z)$ の関数である任意のスカラー関数 $\phi(\vec{r})$ とベクトル $\boldsymbol{A}(\vec{r})$ に関して、以下の式を証明せよ

$$\nabla\times(\nabla\phi)=0$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$$
$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

3. 極座標 (r,θ,ϕ) と直交座標 (x,y,z) の関係は $(x,y,z)=(r\sin\theta\cos\phi,r\sin\theta\sin\phi,r\cos\theta)$ で与えられる。わずかに離れた 2 点間の距離を $dl=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ とするとき、dl^2 を極座標を用いて表せ。

4. ガウス積分、デルタ関数に関連する問題
   (a) $\alpha>0$ として次の関係式。(ヒント: 求めたい積分を I とすると $I^2=\int dxdye^{-(x^2+y^2)}=\int e^{-r^2}rdrd\theta=...$)
$$\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-\alpha x^2}=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$
   これはガウス積分と呼ばれ、物理で良く用いられる。
   (b) $n=1,2,3,\ldots$ として、
$$\int_{-\infty}^{\infty}dxx^{2n}e^{-\alpha x^2}$$
   を求めよ。(ヒント:上の結果の両辺を α で微分してみよ。)
   (c) これを用いると $f(x)$ を任意の関数として
$$\lim_{\Delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}dxf(x)\frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\Delta}}}{\sqrt{2\pi\Delta}}=f(a)$$
   となることを示せ。(ヒント：$f(x)$ を $x=a$ のまわりで形式的にテーラー展開してみよ。)
   この結果からデルタ関数の一つの表し方として、$\delta(x-a)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\Delta}}}{\sqrt{2\pi\Delta}}$ が得られる。デルタ関数を用いると、点電荷の集まりの電荷密度場などを容易に表せる。

---

[1]yoshino@cmc.osaka-u.ac.jp 問題・略解は次週の授業後 `http://www.cp.cmc.osaka-u.ac.jp/~yoshino/Teaching/Electromagnetism1/2017/index.html` に掲載。