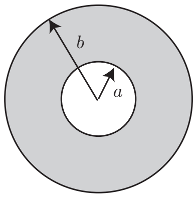
電磁気学１演義　　　　　　第 3 回　2017 年 4 月 25 日

1. 内径 a、外径 b の無限に長い円筒があり、単位長さあたり $\lambda(>0)$ の電荷が一様に分布している。(図 1) これによってできる、電場を求めよ。$r \geq 0$ とし、電場の向きも答えること。誘電率 ϵ_0 は一様とする。

   Maxwell 方程式、 ガウスの定理を用いてみよ。電荷分布は円筒の軸を中心として回転対称であるることに留意し、電場も同じ回転対称性を持つとせよ。[1]



2. 静電ポテンシャルが次の形で与えられているとする

$$\phi(r) = \frac{q_0}{\epsilon_0}\frac{e^{-kr}}{r}$$

   ただし、$k>0$、$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$、$r=|\boldsymbol{r}|$

   このとき

   (1) 電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

   (2) 半径 r より内側の電荷の総量を求めよ。

   (3) 原点の無限小近傍内での電荷量を求めよ。また全空間の電荷の総量を求めよ

   (4) 原点以外での電荷密度を求めよ。

   (5) 原点を除く全空間における電荷の総量を求めよ。この結果と (3) の結果を比較してその整合性を論ぜよ。

3. N 個の電荷 $i=1,2,\ldots,N$ の電荷を q_i、位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i(t)$、速度ベクトルを $\boldsymbol{v}_i(t)$ とする。電荷密度および電流密度は

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i(t)) \qquad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i \boldsymbol{v}_i(t) \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i(t))$$

   と表せる。

[1] ある解に定数ベクトルを足したものも解になっている。対称性を要請するとこの任意性がなくなる。

(a) 上の $\rho(\boldsymbol{r},t)$ および $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ の定義式に基づき、これらが連続の式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot\boldsymbol{j}$$

を満たしていることを示せ。$\boldsymbol{v}_i(t) = d\boldsymbol{r}_i(t)/dt$ に注意せよ。

(b) (a) の結果から、ある閉じた領域 V に含まれる全電荷 $Q(t)$ の時間変化は

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\int d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{j}$$

と表せることを示せ。ただし右辺の面積分は、領域 V を囲む表面とする。

4. 電荷密度を $\rho(\boldsymbol{r},t)$、電流密度を $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ とする。Maxwell 方程式は、連続の式 (電荷の保存則)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot\boldsymbol{j}$$

と矛盾していないとことを示せ。