2018/06/12 出題

電磁気学1演義 中間試験問題

1. 真空中に内径 a，外径 b の球殻があり，電荷 Q が一様に分布している．
   (a) 電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ を求めよ．
   (b) これによって生じる電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ．

   ヒント：電荷分布は原点を中心として球対称であることに留意し，$r < a$，$a < r < b$，$b < r$ の3つの領域に分ける．

2. 時間的に定常な電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ があるとき，静磁場ができる．静磁場は Maxwell 方程式 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$，$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$ に従う．今，z 軸方向に無限に伸びた半径 a の円柱の内部を，一様な定常電流 I が $+z$ 方向に流れている．
   (a) 磁場の向きを図示せよ．
   (b) 円柱内部および外部の磁場を求めよ．

3. 磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m}$ が作るベクトルポテンシャルは，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

   で与えられる．
   (a) $\boldsymbol{m} = m\hat{\boldsymbol{z}}$ として，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の円筒座標系 $\boldsymbol{A} = A_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} + A_z \hat{\boldsymbol{z}}$ での各成分を求めよ．
   (b) 磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を円筒座標系で求めよ．またその様子を大まかに図示せよ．円筒座標系での rotation の公式は，

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \hat{\boldsymbol{z}} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right)$$

   である．

4. 真空中を伝わる電磁場は平面波だけではない．原点を中心に放射状に伝わる波を考えよう．いずれにせよ，真空中では電場，磁場の任意の成分 ψ は次の波動方程式に従う．

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

   (a) 原点を中心に球対称に伝搬する波形を考え，$\psi(r,t)$ のように原点からの距離 r と時間 t だけに依存するとすると，

$$\boldsymbol{\nabla} \psi(r,t) = \hat{\boldsymbol{r}} \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial r}, \quad \boldsymbol{\nabla}^2 \psi(r,t) = \frac{2}{r} \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi(r,t)}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi(r,t))$$

   と表せることを示せ．ここで，$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\boldsymbol{z}}$ で，$\hat{\boldsymbol{r}}$ は動径方向の単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{x}{r} \hat{\boldsymbol{x}} + \frac{y}{r} \hat{\boldsymbol{y}} + \frac{z}{r} \hat{\boldsymbol{z}}$ である．
   (b) 上の結果から $r\psi(r,t)$ の従う偏微分方程式を導け．これをもとに，$\psi(r,t)$ の可能な形を一つ示せ．