電磁気学１演義　　　　　　第2回　2018年4月17日

0. $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$、$r = |\boldsymbol{r}|$として以下を示せ。ただし$\nabla = \hat{x}\partial_x + \hat{y}\partial_y + \hat{z}\partial_z$, $\Delta = \nabla\cdot\nabla$である。また$\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$で、動径方向外向きの単位ベクトルである。

   (a) $\nabla(1/r) = -\hat{\boldsymbol{r}}/r^2$を示せ。

   (b) 原点を除いて$\Delta(1/r) = 0$となることを示せ。

   (c) 原点を中心とする半径aの球の領域を$V(a)$、その表面を$S(a)$としよう。$\Delta(1/r)$を$V(a)$で体積積分するとaに関わらず-4πになることを示せ。(ヒント：ガウスの定理)

   (b),(c) の結果からわかること：$(-\frac{1}{4\pi})\int_V dV\Delta\frac{1}{r}$は積分領域が原点を囲んで入れば1、そうでなければ0. つまり$-\frac{1}{4\pi}\Delta\frac{1}{r} = \delta^3(\boldsymbol{r})$ (3次元のデルタ関数).

1. ある「流れ」の場$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = f(r)\hat{\boldsymbol{r}}$を考える。原点を中心とする半径$a$の球の領域を$V(a)$、その表面を$S(a)$としよう。

   (a) 表面$S(a)$を通過して外に流れ出す流量は$\int_{S(a)} \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}$である。これを面積分を実行することによって求めよ。

   (b) 湧き出し (divergence) $\nabla\cdot\boldsymbol{j}$を求めよ。

   (c) ガウスの定理$\int_{S(a)} \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{V(a)} \nabla\cdot\boldsymbol{j}dV$によれば(b)で求めた湧き出しの体積積分を行うと(a)の結果に一致するはずである。確かめてみよ。

   0. (c) は$f(r) = -1/r^2$の場合に相当する。

2. 時間的に定常な電荷分布があると静電場$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ができる。静電場のしたがうMaxwell方程式は、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0} \qquad \nabla\times\boldsymbol{E} = 0 \tag{1}$$

   である。ここで$\rho(\boldsymbol{r})$は電荷密度、ϵ_0は真空の誘電率である。この解は静電ポテンシャルを用いて

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \qquad \phi(\mathbf{r}) = \int dV'\frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{2}$$

   のように表せる。実際、$\nabla\cdot\boldsymbol{E}$と$\nabla\times\boldsymbol{E}$を計算すると(1)の2つの方程式が満たされていることを確認せよ。(ヒント：No 1-2、および上の0.(b)(c)から分かった$\Delta\left(\frac{-1}{4\pi r}\right) = \delta^3(\boldsymbol{r})$、デルタ関数の性質として$\int dV'\delta^3(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{a})f(\boldsymbol{r}') = f(\boldsymbol{a})$.)

3. 半径aの球の内部に電荷Qが一様に分布している。$Q \geq 0$とする。

   (a) 電荷密度$\rho(\boldsymbol{r})$を求めよ。場所による違いに注意。

(b) これによって生じる電場を求めよ。電場はベクトル量なので、電場の向きも答えること。誘電率は球の内外で変化しないとする。

(簡単な解法)Maxwell 方程式 (1)、ガウスの定理を用いれば良い。電荷分布は球対称であるので、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\hat{\boldsymbol{r}}$ と仮定できる。ここで r は球の中心からの距離、$\hat{\boldsymbol{r}}$ は動径方向の単位ベクトル (外向き）である。

(別解) 静電ポテンシャル ((2) の第 2 式) を求めよ。 電荷分布の球対称性からこれは r のみの関数 $\phi(r)$ となるはずである。これから電場を求めることができる ((2) の第 1 式)。計算は面倒。