電磁気学１演義　　　　　第４回　2018年５月８日

真空中に、時間的に定常な電荷分布があると、時間に依存しない電場、すなわち静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ ができる。これが従う Maxwell 方程式は、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{1}$$

の２つである。その解は静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ を用いて

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \tag{2}$$

と表すことができる。静電ポテンシャルはポワソン方程式

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r})/\epsilon_0 \tag{3}$$

に従う。

この３次元ポワソン方程式の特解 (ただし無限遠で０になるもの) として、

$$\phi(\mathbf{r}) = \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{4}$$

が得られる。これから電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi = \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0}(-\nabla)\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{5}$$

となる。

電荷分布が、３次元的な領域ではなく、曲面上 (あるいは平面上) にある場合は、体積積分を曲面上の面積分に置き換えれば良い: $\int dV'\rho(\mathbf{r}')... \to \int dS'\sigma(\mathbf{r}')...$ ここで $\rho(\boldsymbol{r})$ は電荷密度 (単位体積中の電荷)、$\sigma(\boldsymbol{r})$ は「表面」電荷密度 (単位面積中の電荷) である。例えば、z 軸に垂直な面、$z=0$ 上に電荷分布しているときは、$\rho(\boldsymbol{r}) = \sigma(\boldsymbol{r})\delta(z)$ と書ける。

0. 真空中に、無限に広い平面があり、単位面積あたり σ の電荷が一様に分布している。平面は z 軸に垂直で、$z=0$ にあるとする。電荷密度は $\rho(\boldsymbol{r}) = \sigma\delta(z)$ と表せる。

   実質、一次元の問題になっているので３次元より簡単なはず。上の (4)(5) は、とりあえず忘れ、以下の問に答えよ。

   (a) 対称性から電場は、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(z)\hat{z}$ と表せるだろう。元の Maxwell 方程式から、$E(z)$ の従う微分方程式を求め、これを積分して電場を求めよ。(ヒント：$\int_{-\infty}^{x} dy\delta(y) = \theta(x)$ ここで、$\theta(x)$ は階段関数で $x > 0$ では 1、$x < 0$ では 0 となる。) 積分定数は残しておいても、反転対称性 $E(z) = -E(-z)$ を仮定して定めても良い。

   (b) 静電ポテンシャルも $\phi = \phi(z)$ と表せるだろう。関係式 $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ を積分して、静電ポテンシャルを求めよ。[1]

[1] 当然だが $\phi(z)$ は (3) の１次元版の解になっている。

1. 真空中に、半径 a の円板があり、単位面積あたり σ の電荷が一様に分布している。

   (a) この円盤の中心から高さ $z(>0)$ の点における静電ポテンシャルを、上の (4) の積分を実行することによって求めよ。

   (b) そこでの電場を、関係式 (2) から求めよ。

   (c) 上で求められた電場について、$z/a \ll 1$ および $z/a \gg 1$ での振る舞いを調べよ。[2]

2. 真空中に半径 a の厚さが無視できる球殻上に、単位面積当たり σ の電荷が一様に分布している。

   (a) 球の中心から距離 r の点における静電ポテンシャルを、(4) の積分を実行することによって求めてみよ。球の外、内部で場合分けが必要である。

   (b) 空間各点での電場を、関係式 (2) から求めよ。

[2] 0. の結果とある極限で一致するはずである。