

0. 直交曲線座標系 (q_1, q_2, q_3) で微小な変位ベクトルは $d\mathbf{r} = h_1 dq_1 \mathbf{e}_1 + h_2 dq_2 \mathbf{e}_2 + h_3 dq_3 \mathbf{e}_3$ のように表せる。ここで、 h_i ($i = 1, 2, 3$) はスケール因子、 $\hat{\mathbf{e}}_i$ 単位ベクトルである。後者は正規直交系 $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ になっていて、さらに、 $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ 、 $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$ のような関係を満たしている。スカラー場は $\psi = \psi(q_1, q_2, q_3)$ 、ベクトル場は $\mathbf{A}(q_1, q_2, q_3) = A_1(q_1, q_2, q_3)\hat{\mathbf{e}}_1 + A_2(q_1, q_2, q_3)\hat{\mathbf{e}}_2 + A_3(q_1, q_2, q_3)\hat{\mathbf{e}}_3$ のように表すことができる。

(a) 円筒座標系 (ρ, ϕ, z) 、球座標系 (r, θ, ϕ) でのスケール因子をそれぞれ求めよ。(ヒント：体積素片を考えてみよ。)

(b) 発散 (divergence) $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 、ラプラシアン $\Delta\psi$ 、回転 (rotation) の $\nabla \times \mathbf{A}$ の表式を、円筒座標系、球座標系それぞれで書き下せ。(ヒント：講義ノート)

1. 導体中における電磁波の伝搬を考える。¹ 電流密度は $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ のように電場 \mathbf{E} に比例するものとする。ここで σ は電気伝導度で、抵抗率の逆数であり、正の実数とする。これ以外に、電流は存在しないものとする。また電流を運ぶ荷電粒子以外に、反対電荷の静止したイオンなどがあり、導体は電氣的に中性で、電荷密度は $\rho = 0$ とする。また誘電率、透磁率は簡単のため真空中と同じでそれぞれ ϵ_0 、 μ_0 とする。

(a) この系において電磁場がしたがう Maxwell 方程式を書き下せ。

(b) 電磁場は次の形の偏微分方程式に従うことを示せ。(ヒント：真空中の場合の導出過程を参考に)

$$\nabla^2 \psi - \mu_0 \sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

ここで ψ は、電場 \mathbf{E} 、磁場 \mathbf{B} の任意の成分である。

(c) 簡単のため、 x 軸方向に伝搬する場合を考えよう。平面波 $\psi = e^{i(kx - \omega t)}$ が解になっているとし、波数 k と振動数 ω の関係を導け。振動数 ω の波は、進むとともに振幅が指数関数的に減衰することを示せ。

2. 真空中を伝わる電磁場は平面波だけではない。原点を中心に放射状に伝わる波を考えよう。いずれにせよ、真空中では電場、磁場の任意の成分 ψ は次の波動方程式に従う。

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

¹ 導体中に静電場があり、電荷が静止しているということとはありえない。ここでは電流が生じている。

- (a) 原点を中心に球対称に伝搬する波形を考え、 $\psi(r, t)$ のように原点からの距離 r と時間 t だけに依存するとすると、

$$\nabla\psi(r, t) = \hat{r} \frac{\partial\psi(r, t)}{\partial r}$$

さらに

$$\nabla^2\psi(r, t) = \frac{2}{r} \frac{\partial\psi(r, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi(r, t)}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi(r, t))$$

と表せることを示せ。 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$, で、 \hat{r} は動径方向の単位ベクトル $\hat{r} = \frac{x}{r}\hat{x} + \frac{y}{r}\hat{y} + \frac{z}{r}\hat{z}$ である。

- (b) 上の結果から $r\psi(r, t)$ の従う偏微分方程式を導け。これをもとに、 $\psi(r, t)$ の可能な形を一つ示せ。