2019/07/01 出題

電磁気学１演義
中間試験問題

必要であれば，以下の (真空中の) マクスウェルの方程式を用いてもよい．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\rho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t})}{\varepsilon_0}\,, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0\,, \tag{2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\,, \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\,. \tag{4}$$

1. ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ について，次の式を示せ．(4 点)

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \triangle \boldsymbol{A} \tag{5}$$

2. 電流，電荷が存在しない真空 $\rho(\boldsymbol{r}, t) = 0$，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = 0$ における電磁場の伝搬を考える．電場が波動方程式を満たすことを示し，真空中の光速 c を ε_0，μ_0 で表せ．(ヒント: 式 (5) を用いるとよい．) (5 点)
3. z 軸方向にまっすぐ伸びた金属の導線の中を自由電子が流れている．導線の断面は，半径 a の円とする．ただし，金属中には動かない正イオンもあり，電気的に中性である．この金属の抵抗率を $\rho(>0)$ とする．(つまり，$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{E}/\rho$．) 電場は金属内で一様で $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{z}}$．ただし $E > 0$ とする．その結果，時間的に定常かつ一様な電流が $+z$ 方向に流れているとする．(16 点)
   (a) 単位長さあたり，単位時間に熱として失われるエネルギーを求めよ．
   (b) 導線内外の磁場を求めよ．
   (c) 導線表面のポインティングベクトルを求めよ．
   (d) 単位長さあたり，単位時間に表面から出入りする電磁場のエネルギーを求めよ．流入か流出かを明示すること．
4. 帯電していない導体球殻がある．図のように，球殻内部に点電荷 $q(>0)$ を球の中心ではない場所に固定した．導体中には電荷，電場はなく，電荷があるとすればその表面である．(15 点)
   (a) 球殻内面の電荷の総量 Q_i を求めよ．
   (b) 球殻内面の電荷分布は一様か．
   (c) 球殻外面の電荷の総量 Q_e を求めよ．
   (d) 球殻外面の電荷分布は一様か．
   (e) 球殻外部の電場の様子を電気力線を用いて図示せよ．