電磁気学１演義　　　　　第 2 回　2019 年 4 月 15 日

0. 時間的に定常な電荷分布があると静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ ができる。静電場のしたがう Maxwell 方程式は、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon_0} \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{1}$$

である。ここで $\rho(\boldsymbol{r})$ は電荷密度、 ϵ_0 は真空の誘電率である。一方、いわゆるクーロンの法則を元にすると静電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \tag{2}$$

と表せることを知っている。これが上の静電場の Maxwell 方程式の解になっていることを確かめたい。

   (a) まず準備として $\nabla(1/r) = -\hat{\boldsymbol{r}}/r^2$ を示せ。ここで $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$、$r = |\boldsymbol{r}|$ である。また $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$ で、動径方向外向きの単位ベクトルである。

   (b) 上の結果から、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \qquad \phi(\mathbf{r}) = \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{3}$$

   のように表せることを示せ。

   (c) 上の結果から最初に掲げた静電場の Maxwell 方程式のうち (i) $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ は満たされていること、またもう一方の (ii) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0$ も

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta(1/r) = \delta^3(\mathbf{r}) \tag{4}$$

   が成り立てば、満たされることを示せ。ここで $\Delta = \nabla \cdot \nabla$(ラプラシアン) である。(4) が成り立つことは以下で確かめる。

1. $-\frac{1}{4\pi}\Delta(1/r) = \delta^3(\mathbf{r})$ が成り立つことを確かめよう。

   (a) 原点 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ を除いて $\Delta(1/r) = 0$ となることを示せ。

   (b) 原点 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ を中心とする半径 a の球の領域を $V(a)$、その表面を $S(a)$ としよう。$\Delta(1/r)$ を $V(a)$ で体積積分すると a に関わらず -4π になることを示せ。(ヒント：ガウスの定理)

   (a),(b) の結果からわかること：$(-\frac{1}{4\pi})\int_V dV \Delta\frac{1}{r}$ は積分領域が原点を囲んで入れば 1、そうでなければ 0. つまり $-\frac{1}{4\pi}\Delta\frac{1}{r} = \delta^3(\boldsymbol{r})$ (3 次元のデルタ関数).

2. 半径 a の球の内部に電荷 Q が一様に分布している。$Q \geq 0$ とする。

(a) 電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ を求めよ。場所による違いに注意。

(b) これによって生じる電場を求めよ。電場はベクトル量なので、電場の向きも答えること。誘電率は球の内外で変化しないとする。

Maxwell 方程式 (1)、ガウスの定理を用いれば良い。電荷分布は球対称であるので、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\hat{\boldsymbol{r}}$ と仮定できる。ここで r は球の中心からの距離、$\hat{\boldsymbol{r}}$ は動径方向の単位ベクトル (外向き) である。

3. ある「流れ」の場 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = f(r)\hat{\boldsymbol{r}}$ を考える。原点を中心とする半径 a の球の領域を $V(a)$、その表面を $S(a)$ としよう。

(a) 表面 $S(a)$ を通過して外に流れ出す流量は $\int_{S(a)} \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S}$ である。これを面積分を実行することによって求めよ。

(b) 湧き出し (divergence) $\nabla \cdot \boldsymbol{j}$ を求めよ。

(c) ガウスの定理 $\int_{S(a)} \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{V(a)} \nabla \cdot \boldsymbol{j} dV$ によれば (b) で求めた湧き出しの体積積分を行うと (a) の結果に一致するはずである。確かめてみよ。

原点に点電荷がある場合の静電場では $f(r) \propto r^{-2}$.