電磁気学 1 演義　　　　　第 7 回　2019 年 6 月 3 日

0. 真空中に置かれた 2 枚の円盤状の導体からなるコンデンサーを考える。2 枚の円盤は z 軸に垂直で、どちらの中心も z 軸上にある。円盤間の距離を d とする。電位差が $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ のように振動数 ω で振動する。コンデンサーの中で電場は均一で、端の効果は無視できるとせよ。以下、最終結果は円筒座標系で表せ。振動数 ω が十分小さいとして、電磁場の振幅に関しては ω の 1 次までで考えよ。

   (a) 電場を求めよ。(簡単のため、次の問いで考える磁場が時間変化することによってさらにできる電場は無視できるとする。ω が十分小さければ良い近似になる。)

   (b) 磁場を求めよ。

   (c) ポインティングベクトルを求めよ。また、コンデンサーの内部に、半径 r の円筒領域 (中心軸は z 軸) を考えて、その内部のエネルギー変化とポインティングベクトルの表すエネルギーの出入りがつりあっていることを確かめよ。(注:ここでは ω の 1 次までしか考えていない。)

1. z 軸方向にまっすぐ伸びた金属の導線の中を自由電子が流れている。導線の断面は、半径 a の円とする。ただし、金属中には動かない正イオンもあり、電気的に中性である。この金属の抵抗率を ρ とする。電場は金属内で一様で $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{z}}$ ただし $E > 0$ とする。その結果、時間的に定常かつ一様な電流が $+z$ 方向に流れているとする。

   (a) 単位長さあたり、単位時間に熱として失われるエネルギーを求めよ。

   (b) 磁場、およびポインティングベクトルを求めよ。ただし、導線表面と導線内部だけで良い。

   (c) 単位長さあたり、単位時間に、表面から出入りする電磁場のエネルギーを求め、(1) の結果と整合していることを確かめよ。

2. 電場、磁場、電荷密度、電流密度の次のような平面波展開を考える。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k},\omega) \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{k},\omega)$$

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\hat{\rho}(\boldsymbol{k},\omega) \qquad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{k},\omega)$$

   電荷密度だけはスカラー場である。電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$、磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ の従う Maxwell 方程式を基に、これらを Fourier 変換した $\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k},\omega)$、$\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{k},\omega)$ の従う連立方程式を導け。