2020/05/25 出題

電磁気学1演義 第6回
アドバンストクラス追加問題

ローレンツゲージでの電磁ポテンシャルの波動方程式は，次のような形をしている．

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\right)\psi(\boldsymbol{r},t) = s(\boldsymbol{r},t)\,. \tag{1}$$

ここで，ψ はスカラーポテンシャル，またはベクトルポテンシャルの成分，s は電磁波の源 (ソース) となる電荷密度，または電流密度の成分に対応する．この波動方程式の解 (の一つ) は，遅延ポテンシャル (retarded potential)

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{s(\boldsymbol{r}', t_R)}{R} dV'\,,\ \boldsymbol{R} := \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\,,\ t_R := t - \frac{R}{c}\,, \tag{2}$$

である．(講義の資料を参照のこと．) ここでは，式 (2) が式 (1) を満すことを直接代入することによって確かめよう．(積分と微分の順序を交換する．)

1. 次の式を示せ．

$$\triangle_r \frac{s(\boldsymbol{r}', t_R)}{R} = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{R})s(\boldsymbol{r}', t_R) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}s(\boldsymbol{r}', t_R) \tag{3}$$

   ヒント: 点電荷のポテンシャルがポアッソン方程式を満すことから，$\triangle_R(1/R) = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{R})$ となることがわかる．

2. 上の結果を用いて，式 (2) が式 (1) を満すことを示せ．ヒント: 時間微分を R 微分で表す．