

電磁気学1 演義 第9回

アドバンストクラス追加問題

クーロンゲージ (Coulomb gauge) について考える. クーロンゲージのベクトルポテンシャルを $\mathbf{A}_c(\mathbf{r}, t)$ と書くと, $\nabla \cdot \mathbf{A}_c(\mathbf{r}, t) = 0$ である. (場は遠方で十分速く 0 になるものとする.)

1. ヘルムホルツ (Helmholtz) の定理によれば, 一般のベクトルポテンシャル \mathbf{A} は横成分と縦成分に分解できる. クーロンゲージは横成分のみであるから, ゲージ変換 $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_c = \mathbf{A} + \nabla\chi$ で縦成分を消去できれば, クーロンゲージになる. これを実現する χ を \mathbf{A} で表せ.
2. 電荷密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$, 電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ のもとで, クーロンゲージにおけるスカラーポテンシャル $\phi_c(\mathbf{r}, t)$ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}_c(\mathbf{r}, t)$ が満たす方程式が次のようになることを示せ.

$$\Delta\phi_c = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\mathbf{A}_c = \mu_0\mathbf{j} - \frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial\phi_c}{\partial t} \quad (2)$$

3. スカラーポテンシャルが満たす方程式の解を求めよ. 時間依存性をあらわに書くこと. (ϕ_c を ρ を含む積分で表せばよい.)
4. 式 (2) の左辺は横成分のみである. \mathbf{j} のヘルムホルツ分解を考えて, 右辺も横成分のみであることを示せ. ヒント: 電荷保存則 (連続の方程式) を用いて, \mathbf{j} の縦成分と右辺第 2 項が打ち消すことを示せばよい.