2020/06/29 出題

電磁気学 1 演義 第 10 回
アドバンストクラス追加問題

$z > 0$ が一様で等方的な誘電体で満たされている．($z < 0$ は真空．) この誘電体に $+z$ 方向に進む直線偏光平面波 $\boldsymbol{E}^{(i)}(\boldsymbol{r}, t) = E_0 \hat{\boldsymbol{x}} e^{i(k_0 z - \omega t)}$ が入射している．

1. 振動電場によって誘電体を構成する原子 (または分子) に振動する分極が誘導され，電気双極子輻射が生じる．誘電体中の電場を $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \hat{\boldsymbol{x}} E(z) e^{-i\omega t}$ とおき，電気感受率を χ とすると，微小体積 dV' に生じる電気双極子モーメント $d\boldsymbol{p} e^{-i\omega t}$ は，$d\boldsymbol{p} = \hat{\boldsymbol{x}} \chi E(z') dV'$ となる．dV' の座標を円筒座標で $\boldsymbol{r'} = (\rho, \varphi, z')$ として，z 軸上の場所 $\boldsymbol{r} = (0, 0, z)$ での電気双極子輻射のベクトルポテンシャル $d\boldsymbol{A} e^{-i\omega t}$ が次のようになることを示せ．
$$d\boldsymbol{A} = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \chi \hat{\boldsymbol{x}}\, \rho d\rho d\varphi dz'\, E(z') \frac{e^{ik_0 R}}{R} \tag{1}$$
ただし，$k_0 = \omega / c$，$R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}| = \sqrt{(z - z')^2 + \rho^2}$．(5/18 の講義資料で与えられている結果を用いてよい．)
2. φ および ρ の積分を実行すると，
$$d\boldsymbol{A} = \frac{c\mu_0}{2} \chi \hat{\boldsymbol{x}}\, dz'\, E(z') e^{ik_0 |z - z'|} \tag{2}$$
となることを示せ．($z - z' > 0$ の場合は $+z$ 方向に進む波を表し，$z - z' < 0$ は $-z$ 方向に進む波を表す．) ヒント: $e^{ik_0 \infty}$ のような振動項は，0 としてよい．
3. 電気双極子輻射の電場 $d\boldsymbol{E} e^{-i\omega t}$ が，
$$d\boldsymbol{E} = \frac{ik_0}{2\varepsilon_0} \chi \hat{\boldsymbol{x}}\, dz'\, E(z') e^{ik_0 |z - z'|} \tag{3}$$
となることを示せ．ヒント: まず $d\boldsymbol{B} = \nabla \times d\boldsymbol{A}$ を求め, $d\boldsymbol{E} = c\, d\boldsymbol{B} \times (\pm \hat{\boldsymbol{z}})$ を用いるとよい．複号は波の進行方向，つまり $z - z'$ の符号に対応．
4. 誘電体中の電場は，入射電場，$+z$ 方向の輻射場，および $-z$ 方向の輻射場の和であるから，
$$E(z) = E_0 e^{ik_0 z} + \frac{ik_0 \chi}{2\varepsilon_0} \left[\int_0^z dz' E(z') e^{ik_0 (z - z')} + \int_z^\infty dz' E(z') e^{-ik_0 (z - z')} \right] \tag{4}$$
という関係が成り立つ．$E(z) = A e^{ikz}$ とおいて，上の式から k，A を決定し，屈折率 $n := k/k_0$ と χ の関係が正しく得られていることを示せ．(入射波の $e^{ik_0 z}$ 成分が消え，e^{ikz} 成分が生じていることが分かるだろう．これは Ewald-Oseen の消滅定理の一例である．)