2020/07/13 出題

電磁気学1演義 第12回
アドバンストクラス追加問題

散逸のある分散性媒質中での電磁場のエネルギー (ポインティングの定理) について考えよう．誘電率，透磁率は複素数で角振動数の関数である．

1. マクスウェル方程式から，
$$-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) \tag{1}$$
であることを示せ．ただし，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t):=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ はポインティングベクトル，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ は伝導電流を表す．
2. 以下では，電場がある角振動数 ω のまわりの狭い範囲のフーリエ成分のみを持つ場合を考える．つまり，
$$\boldsymbol{E}(t)=\int d\alpha\tilde{\boldsymbol{E}}(\alpha)e^{-i(\omega+\alpha)t}, \tag{2}$$
と書き，$|\tilde{\boldsymbol{E}}(\alpha)|$ は $|\alpha|$ が十分小さい範囲でのみ有意な値を持つとする．電束密度は，
$$\boldsymbol{D}(t)=\int d\alpha\tilde{\boldsymbol{D}}(\alpha)e^{-i(\omega+\alpha)t}, \tag{3}$$
と表すことができ，一様で等方的な媒質を仮定し，$\tilde{\boldsymbol{D}}(\alpha)=\varepsilon(\omega+\alpha)\tilde{\boldsymbol{E}}(\alpha)$ とする．(場の位置依存性は記法上の簡単のため省いたが，もちろん全ての場が位置の関数である．) ε のテイラー展開の1次まで考えて，
$$\varepsilon(\omega+\alpha)\simeq\varepsilon(\omega)+\alpha\frac{d\varepsilon}{d\omega} \tag{4}$$
と近似して，$\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ を $\boldsymbol{E}(t)$ と $\partial\boldsymbol{E}/\partial t$ で表せ．
3. 式 (1) の右辺第2項の1周期 $2\pi/\omega$ にわたる時間平均が，
$$\left\langle \mathrm{Re}\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\mathrm{Re}\boldsymbol{D}}{\partial t}\right\rangle=\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\left(\frac{d\omega\varepsilon}{d\omega}\right)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*+\frac{1}{2}\omega\,\mathrm{Im}\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*, \tag{5}$$
となることを示せ．ヒント: 場の複素表示ではその実部が実際の場であるから，場の2次の量である式 (1) の右辺第2項は，(先にそれぞれの場の実部をとって)
$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\mathrm{Re}\boldsymbol{D}}{\partial t}&=\frac{1}{4}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^*)\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}^*) &(6)\\&=\frac{1}{4}\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}^*}{\partial t}+\boldsymbol{E}^*\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{E}^*\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}^*}{\partial t}\right), &(7)\end{aligned}$$
となる．第1項と第4項は速く振動する項で，時間平均は0である．前問の結果を用いて第2項と第3項を評価すればよい．(時間平均は自明．) その際，誘電率の虚部に関する項では α の1次の項は無視してよい．

4. 磁場に関しても同様の議論ができ，$\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{D} \to \boldsymbol{B}$，$\varepsilon \to \mu$ とすればよい．これと上の結果から，媒質中のポインティングの定理

$$\langle \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S} \rangle + \frac{\partial u_{\mathrm{em}}}{\partial t} = -\langle \mathrm{Re}\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{Re}\boldsymbol{j} \rangle - \frac{1}{2}\omega\,\mathrm{Im}\varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^* - \frac{1}{2}\mu\,\mathrm{Im}\mu \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}^*\,, \tag{8}$$

を得る．ただし，

$$u_{\mathrm{em}} := \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left(\frac{d\omega\varepsilon}{d\omega}\right)\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^* + \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left(\frac{d\omega\mu}{d\omega}\right)\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}^*\,, \tag{9}$$

である．閉領域 V で積分すれば，式 (8) の左辺第 1 項は単位時間に V の表面から流出するエネルギーである．式 (8) の左辺第 2 項，右辺第 1 項は何を表しているか.

5. 式 (8) の右辺第 2，3 項は媒質中の散逸を表している．誘電率および透磁率の虚部の符号について考察せよ．