2021/04/19 出題

電磁気学1演義 第2回

アドバンストクラス追加問題

磁気単極子 (magnetic monopole) について考える．

1. ベクトルポテンシャル (球座標表示)

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{N}}(\boldsymbol{r}) = \frac{g}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{1}$$

   に対応する磁束密度を，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ を用いて計算せよ．

2. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{N}}(\boldsymbol{r})$ が特異性を示す領域を除いて，上で求めた $\boldsymbol{B}$ が原点にある磁気単極子の磁束密度であることを確認せよ．(点電荷で知っていることを用いればよい．) 特異性はどこにあるか．

3. 同様にして，

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{S}}(\boldsymbol{r}) = -\frac{g}{4\pi r}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{2}$$

   について $\boldsymbol{B}$ を求めよ．$\boldsymbol{A}^{\mathrm{S}}(\boldsymbol{r})$ が特異性を示す領域はどこか．

4. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{N}}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{S}}$ の両方が非特異的な領域で，これらの差がゲージ変換であることを示せ．ヒント: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{N}}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{A}^{\mathrm{S}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla}\chi(\boldsymbol{r})$ となるようなスカラー関数 $\chi(\boldsymbol{r})$ を見つければよい．$\chi(\boldsymbol{r}) = a\varphi$ (a は定数) としてみよ．

半径 $r(\neq 0)$ の球面を考え，ベクトルポテンシャルとして，北半球で $\boldsymbol{A}^{\mathrm{N}}$，南半球で $\boldsymbol{A}^{\mathrm{S}}$ を用いれば，原点以外で特異性のない磁気単極子のベクトルポテンシャルが得られる．これらを張り合わせる赤道上ではその差は高々ゲージ変換であるから，矛盾なく同じ物理を記述しているはずである．(このように構成された磁気単極子は Wu-Yang monopole と呼ばれる．) 量子力学でゲージ変換を習えば，もし磁気単極子が存在するならば，電荷が量子化される (とびとびの値をとる) ことが分かるだろう．残念ながら，磁気単極子は未発見である．