2021/06/28 出題

電磁気学１演義 第９回
アドバンストクラス追加問題

クーロンゲージ (Coulomb gauge) について考える．クーロンゲージのベクトルポテンシャルを $\boldsymbol{A}_c(\boldsymbol{r},t)$ と書くと，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}_c(\boldsymbol{r},t)=0$ である．(場は遠方で十分速く 0 になるものとする．)

1. ヘルムホルツ (Helmholtz) の定理によれば，一般のベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は横成分と縦成分に分解できる．クーロンゲージは横成分のみであるから，ゲージ変換 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}_c=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}\chi$ で縦成分を消去できれば，クーロンゲージになる．これを実現する χ を $\boldsymbol{A}$ で表せ．ヒント: 遠方で十分速く 0 になるベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ について，
$$\boldsymbol{F}_L=-\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\int\frac{\boldsymbol{\nabla}'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3r'\,. \tag{1}$$
2. 電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$，電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ のもとで，クーロンゲージにおけるスカラーポテンシャル $\phi_c(\boldsymbol{r},t)$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}_c(\boldsymbol{r},t)$ が満す方程式が次のようになることを示せ．
$$\triangle\phi_c=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2}$$
$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\triangle\right)\boldsymbol{A}_c=\mu_0\boldsymbol{j}-\frac{1}{c^2}\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial\phi_c}{\partial t} \tag{3}$$
3. スカラーポテンシャルが満す方程式の解を求めよ．時間依存性をあらわに書くこと．(ϕ_c を ρ を含む積分で表せばよい．)
4. 式 (3) の左辺は横成分のみである．$\boldsymbol{j}$ のヘルムホルツ分解を考えて，右辺も横成分のみであることを示せ．ヒント: 電荷保存則 (連続の方程式) を用いて，(式 (1) で与えられる) $\boldsymbol{j}$ の縦成分と右辺第 2 項が打ち消すことを示せばよい．