

電磁気学1 演義 第12回 アドバンストクラス追加問題

散逸のある分散性媒質中での電磁場のエネルギー (ポインティングの定理) について考えよう。誘電率, 透磁率は複素数で角振動数の関数である。

1. マクスウェル方程式から,

$$-\nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

であることを示せ。ただし, $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ はポインティングベクトル, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ は伝導電流を表す。

2. 以下では, 電場がある角振動数 ω のまわりの狭い範囲のフーリエ成分のみを持つ場合を考える。つまり,

$$\mathbf{E}(t) = \int d\alpha \tilde{\mathbf{E}}(\alpha) e^{-i(\omega+\alpha)t}, \quad (2)$$

と書き, $|\tilde{\mathbf{E}}(\alpha)|$ は $|\alpha|$ が十分小さい範囲でのみ有意な値を持つとする。電束密度は,

$$\mathbf{D}(t) = \int d\alpha \tilde{\mathbf{D}}(\alpha) e^{-i(\omega+\alpha)t}, \quad (3)$$

と表すことができ, 一様で等方的な媒質を仮定し, $\tilde{\mathbf{D}}(\alpha) = \varepsilon(\omega + \alpha) \tilde{\mathbf{E}}(\alpha)$ とする。(場の位置依存性は記法上の簡単のため省いたが, もちろん全ての場が位置の関数である。) ε のテイラー展開の1次まで考えて,

$$\varepsilon(\omega + \alpha) \simeq \varepsilon(\omega) + \alpha \frac{d\varepsilon}{d\omega} \quad (4)$$

と近似して, $\partial \mathbf{D} / \partial t$ を $\mathbf{E}(t)$ と $\partial \mathbf{E} / \partial t$ で表せ。

3. 式 (1) の右辺第2項の1周期 $2\pi/\omega$ にわたる時間平均が,

$$\left\langle \operatorname{Re} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \operatorname{Re} \mathbf{D}}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re} \left(\frac{d\omega \varepsilon}{d\omega} \right) \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \frac{1}{2} \omega \operatorname{Im} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*, \quad (5)$$

となることを示せ。ヒント: 場の複素表示ではその実部が実際の場であるから, 場の2次の量である式 (1) の右辺第2項は, (先にそれぞれの場の実部をとって)

$$\operatorname{Re} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \operatorname{Re} \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{4} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} + \mathbf{D}^*) \quad (6)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} \right), \quad (7)$$

となる。第1項と第4項は速く振動する項で, 時間平均は0である。前問の結果を用いて第2項と第3項を評価すればよい。(時間平均は自明。) その際, 誘電率の虚部に関する項では α の1次の項は無視してよい。

4. 磁場に関しても同様の議論ができ、 $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$, $\varepsilon \rightarrow \mu$ とすればよい。これと上の結果から、媒質中のポインティングの定理

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{S} \rangle + \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} = -\langle \text{Re} \mathbf{E} \cdot \text{Re} \mathbf{j} \rangle - \frac{1}{2} \omega \text{Im} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* - \frac{1}{2} \mu \text{Im} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*, \quad (8)$$

を得る。ただし、

$$u_{\text{em}} := \frac{1}{4} \text{Re} \left(\frac{d\omega \varepsilon}{d\omega} \right) \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \frac{1}{4} \text{Re} \left(\frac{d\omega \mu}{d\omega} \right) \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*, \quad (9)$$

である。閉領域 V で積分すれば、式 (8) の左辺第 1 項は単位時間に V の表面から流出するエネルギーである。式 (8) の左辺第 2 項、右辺第 1 項は何を表しているか。

5. 式 (8) の右辺第 2, 3 項は媒質中の散逸を表している。誘電率および透磁率の虚部の符号について考察せよ。