

## 1.7 静電場とポアソン方程式

$$(1) \quad \Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0},$$

$$(2) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}).$$

静電ポテンシャル  $\phi(\mathbf{r})$  は式 (1) を適当な境界条件のもとで解くこと  
によって決定され, 静電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  は式 (2) から求める.

特に電荷がないところ ( $\rho(\mathbf{r}) = 0$ ) では,

$$(3) \quad \Delta\phi(\mathbf{r}) = 0, \quad \text{ラプラス (Laplace) 方程式.}$$

● デカルト (カーテシアン) 座標では,

$$(4) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

○ 例題 1: 無限に広い平行板コンデンサー

真空中に 2 枚の無限に広い導体の板 A, B が距離  $d$  だけ離れて平行に置かれている。導体の法線を  $z$  軸にとり,  $z = 0$  が板 A,  $z = d$  が板 B であるとする。A の電位を  $\phi_A$ , B の電位を  $\phi_B$  とし、AB 間の電場を求める。

$\phi(\mathbf{r})$  は  $z$  のみの関数ゆえ  $\phi(\mathbf{r}) = \phi(z)$  と書く。AB 間に電荷は無いから, 式 (1) より,

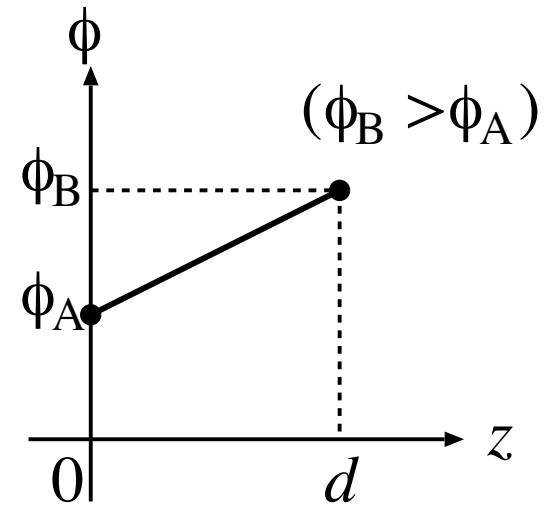
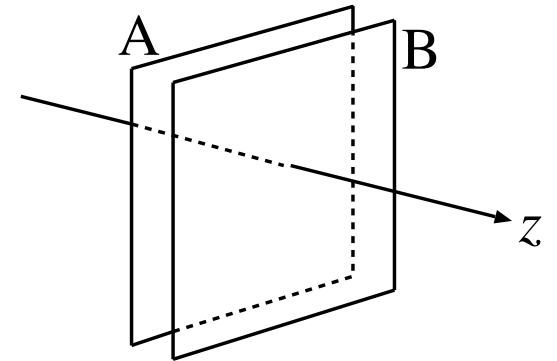
$$(5) \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi(z) = 0.$$

解は,  $c_0, c_1$  を定数として,

$$(6) \quad \phi(z) = c_0 + c_1 z.$$

境界条件  $\phi(0) = \phi_A, \phi(d) = \phi_B$  より,

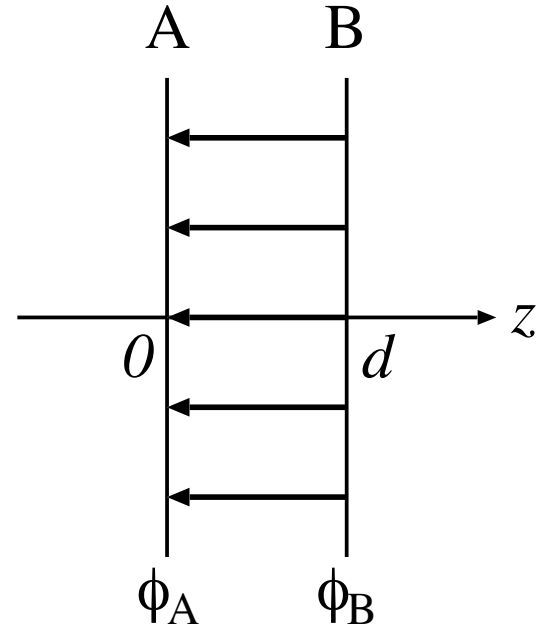
$$(7) \quad \phi(z) = \phi_A + \frac{\phi_B - \phi_A}{d} z.$$



式 (2) より , 電位差  $V \equiv \phi_B - \phi_A$  を用いると ,

$$(8) \quad E_z(z) = -\frac{V}{d}, \quad E_x = E_y = 0.$$

すなわち , ( $V > 0$  として) 電場は  $z$  軸の負の方向を向き , 一定である .



● 円柱 (円筒) 座標  $(R, \varphi, z)$ :

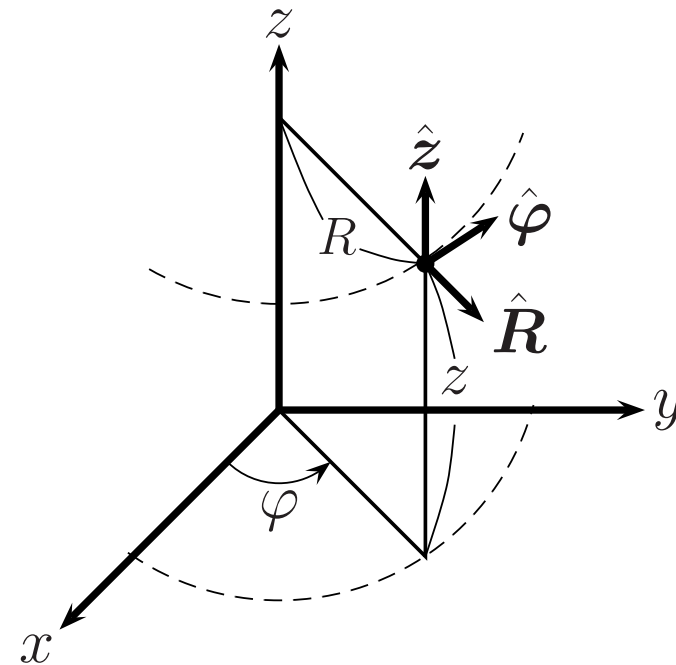
(9)  $x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, z = z.$

円柱座標の (直交) 基底ベクトルは,  
 $\hat{R}, \hat{\varphi}, \hat{z}$  で,

$$\hat{R} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi,$$

(10)  $\hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi,$

$$\hat{z} = \hat{z}.$$



微小な変位を表すベクトル (線要素) は,

(11)  $dr = \hat{R}dR + \hat{\varphi} R d\varphi + \hat{z}dz.$

微小な体積 (体積要素) は,

(12)  $dV = R dR d\varphi dz.$

関数  $f$  の全微分は ,

$$(13) \quad df = \frac{\partial f}{\partial R} dR + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} dz .$$

$$(14) \quad df = d\mathbf{r} \cdot \nabla f = \hat{\mathbf{R}} \cdot \nabla f dR + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \nabla f R d\varphi + \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla f dz$$

と比較して ,

$$(15) \quad \hat{\mathbf{R}} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial R}, \quad \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \nabla = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial z} .$$

つまり , 円柱座標  $(R, \varphi, z)$  では ,

$$(16) \quad \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial R}, \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \hat{\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial R} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} .$$

ラプラシアンは,

$$(17) \quad \frac{\partial \hat{R}}{\partial \varphi} = \hat{\varphi}, \quad \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} = -\hat{R}$$

に注意して,

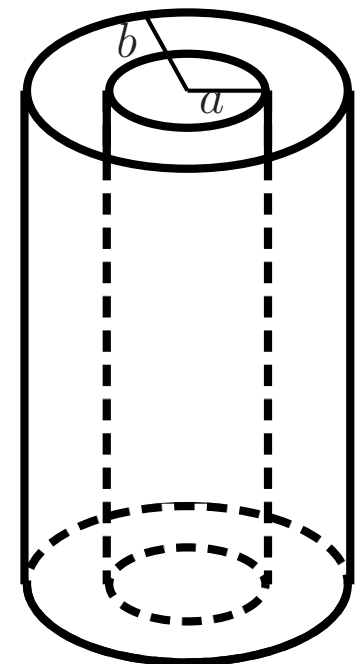
$$(18) \quad \Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

○ 例題 2: 半径  $a$ ,  $b$  ( $a < b$ ) の無限に長い同軸導体円筒

中心軸を  $z$  軸とする円柱座標で考える. 対称性から,  $\phi(\mathbf{r}) = \phi(R)$ . 電位差を  $\phi(b) - \phi(a) = V$  とする.

式 (3) は, 式 (18) から,

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial R} R \frac{\partial}{\partial R} \phi(R) = 0.$$



解は ,

$$(20) \quad \phi(R) = c_0 + c_1 \log R.$$

$$\phi(b) - \phi(a) = V \text{ より ,}$$

$$(21) \quad \phi(R) = c_0 + \frac{V}{\log(b/a)} \log R. \quad (a < R < b)$$

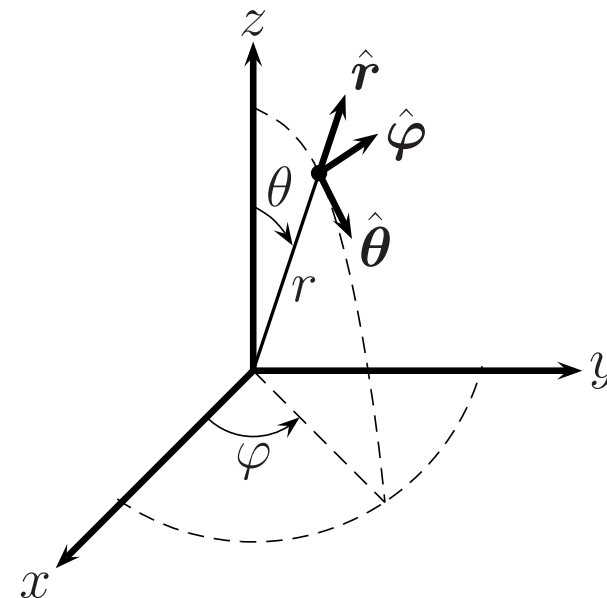
電場は  $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{R}}E_R + \hat{\boldsymbol{\varphi}}E_\varphi + \hat{\mathbf{z}}E_z = -\nabla\phi(R)$  だから , 式 (16) より

$$(22) \quad E_R = -\frac{\partial\phi(R)}{\partial R} = -\frac{V}{\log(b/a)} \frac{1}{R}, \quad E_\varphi = E_z = 0. \quad (a < R < b)$$

● 球座標  $(r, \theta, \varphi)$

$$(23) \quad \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

基底ベクトル  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$ ,  $\hat{\varphi}$  は,



$$(24) \quad \begin{aligned} \hat{r} &= \hat{x} \sin \theta \cos \varphi + \hat{y} \sin \theta \sin \varphi + \hat{z} \cos \theta, \\ \hat{\theta} &= \hat{x} \cos \theta \cos \varphi + \hat{y} \cos \theta \sin \varphi - \hat{z} \sin \theta, \\ \hat{\varphi} &= -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi. \end{aligned}$$

線要素は,

$$(25) \quad d\mathbf{r} = \hat{r} dr + \hat{\theta} r d\theta + \hat{\varphi} r \sin \theta d\varphi.$$

体積要素は,

$$(26) \quad dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$



全微分は，

$$(27) \quad df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi .$$

$$(28) \quad df = d\mathbf{r} \cdot \nabla f = \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla f dr + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \nabla f r d\theta + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \nabla f r \sin \theta d\varphi$$

と比較して，

$$(29) \quad \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \nabla = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \nabla = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} .$$

つまり，球座標  $(r, \theta, \varphi)$  では，

$$(30) \quad \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} .$$

ラプラシアンは，

$$(31) \quad \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{\theta}, \quad \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} = \sin \theta \hat{\varphi}, \quad \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\hat{r}, \quad \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \varphi} = \cos \theta \hat{\varphi},$$
$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} = -(\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta})$$

などに注意して，

$$(32) \quad \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

○ 例題 3: 半径  $a$ ,  $b$  ( $a < b$ ) の同心導体球面  
球座標で考える.  $\phi(\mathbf{r}) = \phi(r)$ . 式 (3) は, 式 (32) から,

$$(33) \quad \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi(r) = 0$$

解は,

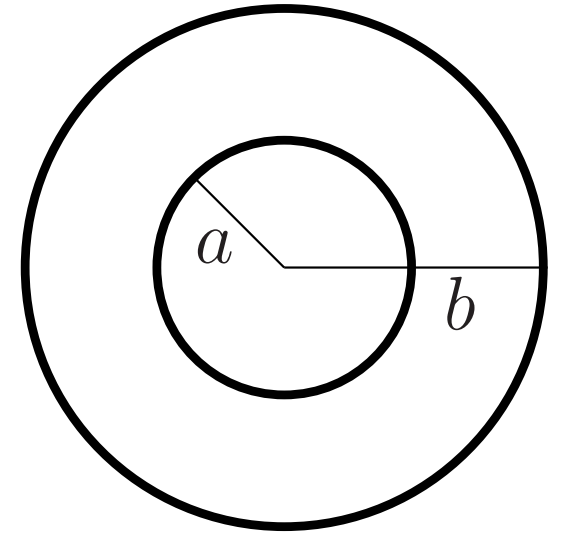
$$(34) \quad \phi(r) = c_0 + \frac{c_1}{r}.$$

$\phi(b) - \phi(a) = V$  とすれば,

$$(35) \quad c_1 = \frac{ab}{a-b} V.$$

電場は  $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{r}} E_r + \hat{\boldsymbol{\theta}} E_\theta + \hat{\boldsymbol{\varphi}} E_\varphi = -\nabla \phi(r)$  だから, 式 (30) より,

$$(36) \quad E_r = -\frac{\partial \phi(r)}{\partial r} = \frac{ab}{a-b} \frac{V}{r^2}, \quad E_\theta = E_\varphi = 0. \quad (a < r < b)$$



- ポアソン方程式の一般解

$|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  で  $\phi(\mathbf{r}) \rightarrow 0$  であるような場合を考える。(電荷が有限の範囲に分布していればよい.)

原点に単位点電荷がある場合,

$$(37) \quad \Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta^3(\mathbf{r}).$$

この解は,

$$(38) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}|}$$

と知っている.

$$(39) \quad G(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}|}$$

とすると,

$$(40) \quad \Delta G(\mathbf{r}) = -\delta^3(\mathbf{r}).$$

この  $G(\mathbf{r})$  を用いると,

$$(41) \quad \Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$

の解は

$$(42) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')dV'$$

と書ける．実際，

$$(43) \quad \begin{aligned} \Delta\phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int \Delta_r G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')dV' \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \int \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')dV' = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

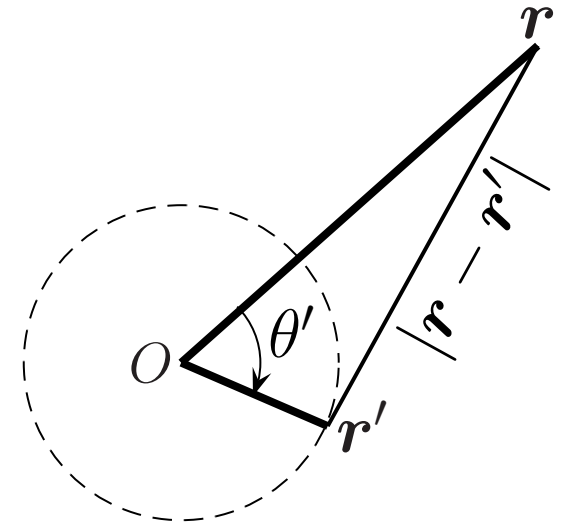
従って，式(41)の解は，

$$(44) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

○ 例題 4: 球対称な電荷分布:  $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$  .

$r$  の方向を  $z$  軸にとり,  $r$  と  $r'$  のなす角を  $\theta'$  とする. 式 (44) は,

$$(45) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$



$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty r'^2 dr' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\rho(r')}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} .$$

$\varphi'$  の積分は自明で,  $\int_0^{2\pi} d\varphi' = 2\pi$  .

$\theta'$  の積分は ,

$$(46) \quad \int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} = \int_{-1}^1 \frac{d \cos \theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}}$$
$$= -\frac{1}{rr'} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{rr'} (r + r' - |r - r'|)$$
$$= \begin{cases} 2/r, & r > r' \\ 2/r', & r < r' \end{cases} .$$

よって ,

$$(47) \quad \phi(\mathbf{r}) = \phi(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \int_r^\infty \rho(r') r' dr' \right] .$$

半径  $r$  内の電荷は ,

$$(48) \quad Q(r) = \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi'$$
$$= 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' .$$

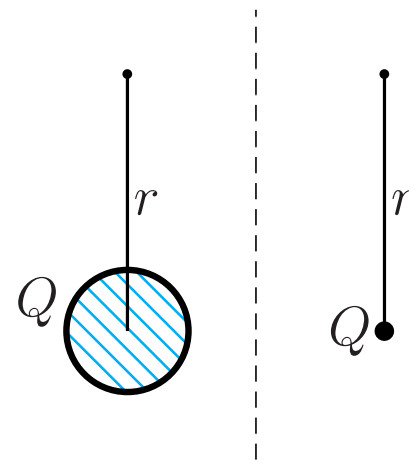
これを用いて ,

$$(49) \quad \phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r)}{r} + \frac{1}{\epsilon_0} \int_r^\infty \rho(r') r' dr' .$$

◇ 電荷が半径  $a$  の球内にのみあるとき ,  
全電荷は  $Q = Q(a)$  .

$$(50) \quad \phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} . \quad (r > a)$$

(原点に点電荷  $Q$  があるときと同じ .)





◇ 電荷が球殻に分布している場合:

$$(51) \quad \rho(r) \begin{cases} \neq 0, & r_1 < r < r_2 \\ = 0, & \text{それ以外.} \end{cases}$$

$r < r_1$  では,

$$(52) \quad \phi(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \rho(r') r' dr' = \text{定数.}$$

従って,  $E = 0$ . (電場はない.)

$r > r_2$  では, ( $Q = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho(r') r'^2 dr' = \text{球殻の全電荷}$ )

$$(53) \quad \phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \quad (\text{点電荷と同じ})$$

