

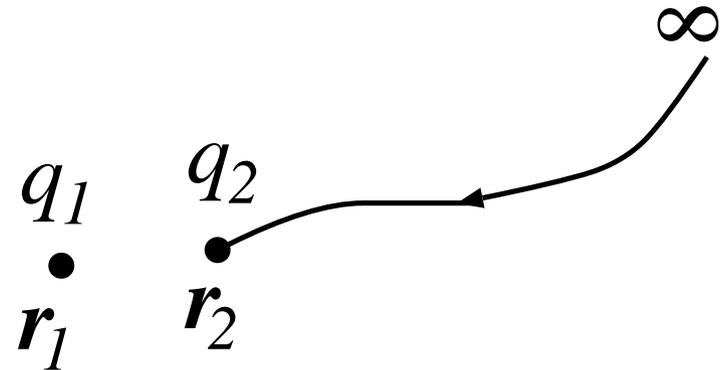
2.9 静電エネルギー

2.9.1 電荷分布のエネルギー

- 点電荷系のエネルギー
- 点電荷対のエネルギー

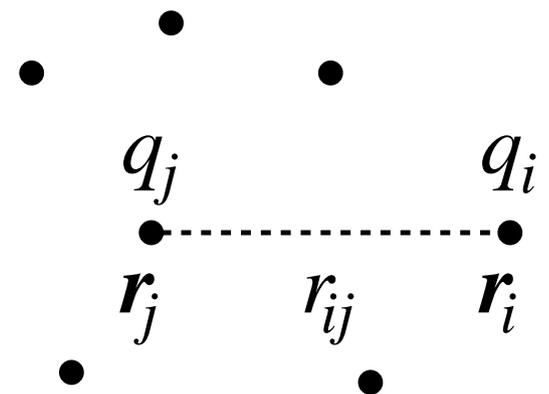
無限遠から q_2 を r_2 まで移動させるのに必要なエネルギーは (q_1 は固定), 式 (2.4.6) で $r_A \rightarrow \infty$, $r_B = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = r_{12}$, $q \rightarrow q_1$ として,

$$(1) \quad U_e = q_2 w = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}.$$



○ 点電荷が3個以上あるとき

1つの電荷 q_i に働く力は $q_j (j \neq i)$ から受ける力の和であるから、 q_i を無限遠から r_i まで運ぶのに必要な仕事は、 $q_j (j \neq i)$ と q_i の対のエネルギーの和になる。従って、全静電エネルギーは、



$$(2) \quad U_e = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}, \quad r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|.$$

ここで、最初の和、 $\sum_{i < j}$ は、すべての対についての和を表わしている。2番目の和、 $\sum_{i \neq j}$ に $\frac{1}{2}$ の因子がかかっているのは、各対について2回数えているからである。

また,

$$(3) \quad U_e = \frac{1}{2} \sum_i q_i \left(\sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \right) = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_i(\mathbf{r}_i).$$

とも書ける. ただし,

$$\phi_i(\mathbf{r}_i) \equiv \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

は, q_i 以外の電荷が \mathbf{r}_i に作るポテンシャル.

- 連続的な電荷分布の場合

式 (2) で和を積分に置き換えて,

$$(4) \quad U_e = \frac{1}{2} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} dV_1 dV_2 .$$

式 (2. 4. 19)

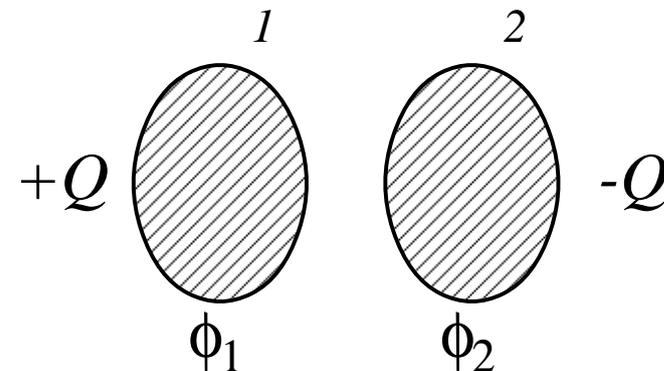
$$\phi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} dV_2$$

から,

$$(5) \quad U_e = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) dV .$$

● 例: コンデンサーのエネルギー

導体外では $\rho(\mathbf{r}) = 0$ ゆえ,



$$\begin{aligned}
 (6) \quad U_e &= \frac{1}{2} \int_{\text{導体 1}} \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV + \frac{1}{2} \int_{\text{導体 2}} \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV \\
 &= \frac{1}{2} \phi_1 \int_{\text{導体 1}} \rho(\mathbf{r}) dV + \frac{1}{2} \phi_2 \int_{\text{導体 2}} \rho(\mathbf{r}) dV \\
 &\quad (\text{導体は等ポテンシャル}) \\
 &= \frac{1}{2} \phi_1 Q - \frac{1}{2} \phi_2 Q = \frac{1}{2} Q (\phi_1 - \phi_2) \\
 &= \frac{Q^2}{2C} \quad \Leftarrow Q = C(\phi_1 - \phi_2).
 \end{aligned}$$

cf. (2. 8. 26).

2.9.2 電場のエネルギー密度

- エネルギーはどこにあるのか？

- 静電場ではどこともいえない。

式 (5) では電荷に付随しているように見える。しかし、電磁波は電荷のない空間を伝わり、エネルギーを運ぶ。

⇒ 場に付随させるほうがもっともらしい。

- 近接相互作用の考え方で書き直す。

ポアソン方程式 $\Delta\phi = -\rho/\epsilon_0$ を用いると、

$$\begin{aligned} (7) \quad U_e &= -\frac{1}{2}\epsilon_0 \int (\Delta\phi)\phi dV \\ &\Leftarrow \phi\Delta\phi = \phi\nabla^2\phi = \nabla \cdot (\phi\nabla\phi) - (\nabla\phi) \cdot (\nabla\phi) \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2} \left[\int \nabla \cdot (\phi\nabla\phi) dV - \int (\nabla\phi)^2 dV \right] \end{aligned}$$

$\mathbf{E} = -\nabla\phi$ を用いて,

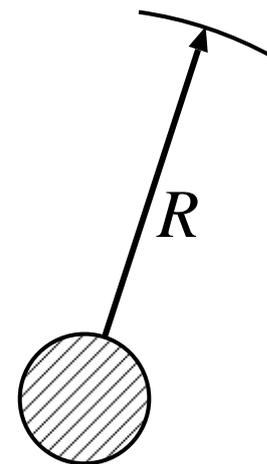
$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int \nabla \cdot (\phi \mathbf{E}) dV + \int \mathbf{E}^2 dV \right].$$

第1項の積分は、ガウスの定理を用いて,

$$(8) \quad \int_V \nabla \cdot (\phi \mathbf{E}) dV = \int_S \phi \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

電荷分布が有限の範囲にあるとして、 V として十分大きな球 (半径 R) をとる. S は半径 R の球面. 十分遠方では点電荷のように見えるはずだから,

$\phi \sim 1/R$, $E \sim 1/R^2$, $dS \sim R^2$. よって, この積分は ($R \rightarrow \infty$ として) ゼロ. 従って,



$$(9) \quad U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) dV$$

場のみで書けた。(これは静電場以外にも拡張できる。)

電場のエネルギー密度は,

$$(10) \quad u_e(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2(\mathbf{r})$$

と書ける. ($U_e = \int u_e(\mathbf{r}) dV$)

● 例: 一様に帯電した球

$$(11) \quad \rho(r) = \begin{cases} \rho, & r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

§§2.5.2 の例 1, 式 (2.5.28) から

$$(12) \quad E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{a^3}, & r < a, \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}, & r > a. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(13) \quad U_e &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2(r) 4\pi r^2 dr \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \left[\int_0^a \frac{r^2}{a^6} 4\pi r^2 dr + \int_a^\infty \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr \right] \\
&= \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}. \quad \text{cf. 式 (2. 8. 28)}
\end{aligned}$$

($a \rightarrow 0$ の極限で電荷 Q の点電荷となるが, このとき, $U_e \rightarrow \infty$.)