

## 3.2 ローレンツ (Lorentz) 力

### 3.2.1 電荷に働く力

- 静止している電荷  $q$  ( $v = 0$ )

(1) 
$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (\text{クーロン力})$$

- 速度  $v$  で動いている電荷  $q$

(2) 
$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{B} = \text{磁束密度 (磁場)}. \quad (\text{ローレンツ力})$$

速度に比例し，速度に垂直な (仕事をしない) 力がある。

$\mathbf{B}$  の単位:

$$\frac{\text{Ns}}{\text{C m}} = \frac{\text{Nm}}{\text{A}} \frac{1}{\text{m}^2} = \frac{\text{Wb(ウェーバー)}}{\text{m}^2} = \text{T(テスラ)}.$$

(Wb = Nm/A = Vs)

式 (2) は電磁場 ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ) が時間に依っているときも正しい。

(3)  $\mathbf{F} = q [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]$  ,  $\mathbf{r}$  = 電荷の座標 ,  $t$  = 時間 .

● 例 1: 一様な定常磁場中の点電荷の運動

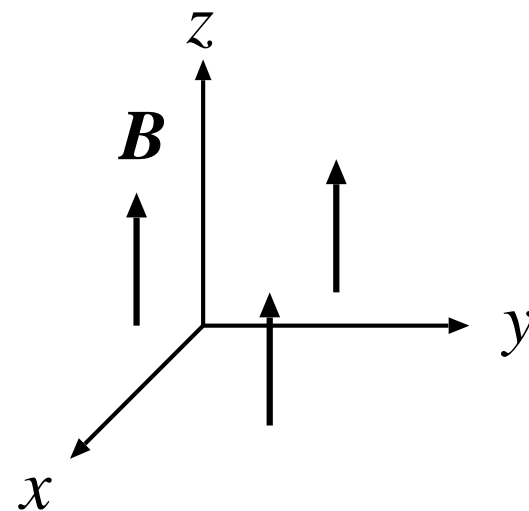
(4)  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$

とする。点電荷  $q$  の質量を  $m$ , 速度を  $\mathbf{v}$  とすると,

(5)  $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} .$

$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (v_x, v_y, v_z) \times (0, 0, B) = (v_y B, -v_x B, 0)$  ゆえ、式 (5) を成分で書くと、

(6)  $\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} v_y B , \frac{dv_y}{dt} = -\frac{q}{m} v_x B , \frac{dv_z}{dt} = 0 .$



$z$  方向の運動は,

$$(7) \quad v_z = v_{z0} \quad (\text{定数}).$$

$v_y$  を消去すると,

$$(8) \quad \frac{d^2}{dt^2} v_x = - \left( \frac{q}{m} B \right)^2 v_x.$$

よって,

$$(9) \quad v_x = v_{\perp} \cos(\omega t + \beta), \quad \omega \equiv \frac{q}{m} B, \quad v_{\perp}, \beta : \text{定数},$$

$$(10) \quad v_y = -v_{\perp} \sin(\omega t + \beta).$$

(注:  $v_x^2 + v_y^2 = v_{\perp}^2$ .  $v_{\perp}$  は速度の  $z$  軸に垂直な成分の大きさ. ) これを  $t$  で積分して,

$$(11) \quad x = \frac{v_{\perp}}{\omega} \sin(\omega t + \beta) + x_0, \quad y = \frac{v_{\perp}}{\omega} \cos(\omega t + \beta) + y_0.$$

( $x_0, y_0$ : 定数)

これより,

$$(12) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\frac{v_{\perp}}{\omega}\right)^2.$$

すなわち, 半径  $v_{\perp}/\omega = v_{\perp}m/(qB)$  の円.  $z$  方向は式 (7) より,

$$(13) \quad z = v_{z0}t + z_0, \quad \text{等速運動.}$$

よって, 一定の半径のらせん運動をする.  
点電荷の運動エネルギーは,

$$(14) \quad \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{m}{2}(v_{\perp}^2 + v_{z0}^2) = \text{一定.}$$

(磁場による力は仕事をしない. )

### 3.2.2 磁場中の電流に働く力

- 磁場中の細い一様な導線を流れる電流を考える。

点電荷  $q$  が平均速度  $\boldsymbol{v}$  で移動している  
と考えると、1個の電荷が受ける力は

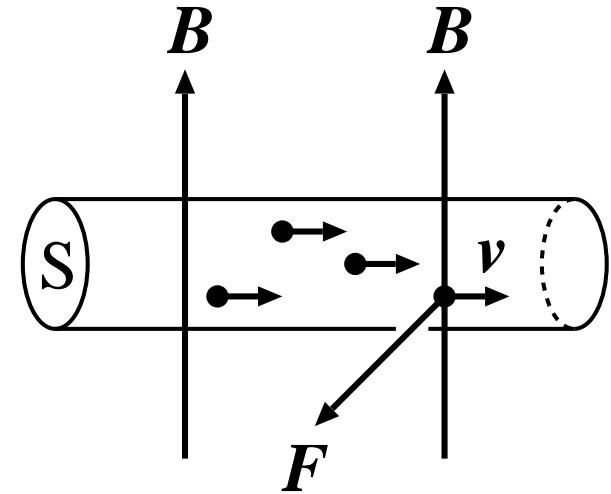
$$(15) \quad q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}.$$

電荷の数密度を  $n$  とすると微小体積  $dV$  の受ける力は、( $ndV$  が電荷の個数)

$$(16) \quad ndV q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{B} dV. \quad (\text{式 (3.1.4)})$$

断面  $S$  について積分すると、電流素片が受ける力は、

$$(17) \quad d\boldsymbol{F} = \int_S \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{B} dS dr = I d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}. \quad (\text{式 (3.1.20)})$$

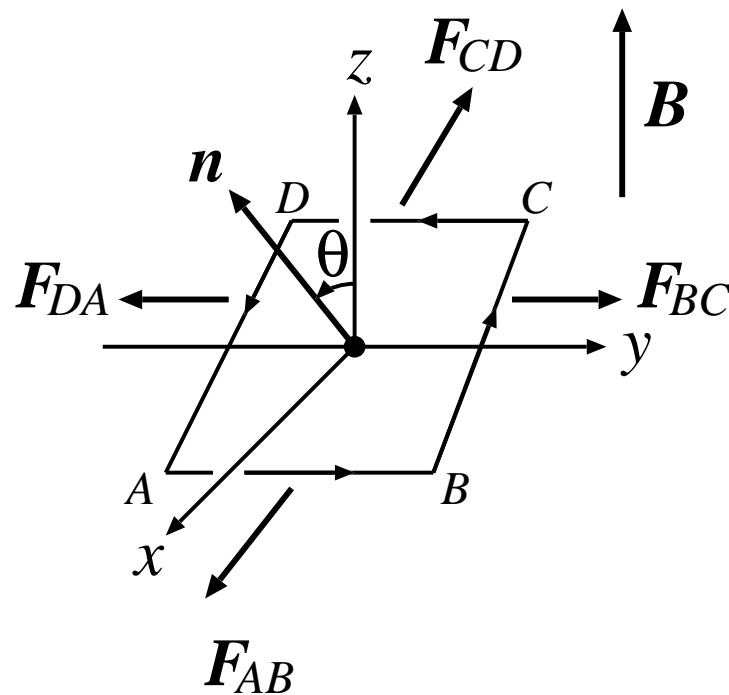


単位長さあたりの力は，  $I d\mathbf{r} = I d\mathbf{r}$  と書けば，

$$(18) \quad \mathbf{I} \times \mathbf{B}$$

となる． ( $q$  に依存しないことに注意．)

● 例 1: ループ電流に働く力  
一様な磁場中の長方形ループ電流  $ABCD$  を考える．  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ ．  
 $AB = a$ ，  $BC = b$ ． ループ面は  $y$  軸を通り， その法線ベクトルは  $z$  軸と角度  $\theta$  をなす． 導線  $AB$  に働く力は，  $CD$  に働く力と逆向きで同じ大きさ．  $BC$  と  $DA$  も同様． 従って， ループ全体に働く力はゼロ． しかし，  $y$  軸のまわりに回転させようとする偶力 (トルク) がある．



$$(19) \quad F_{AB} = F_{CD} = IBa .$$

よって、トルクは、

$$(20) \quad T = I B a b \sin \theta = I a b B \sin \theta .$$

$$(21) \quad \mathbf{m} = I a b \mathbf{n} \quad (\text{磁気双極子モーメント})$$

と書くと、

$$(22) \quad \mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} .$$

○ 一般に平面回路 (面積  $S$ , 法線ベクトル  $\mathbf{n}$ ) を流れる電流について、

$$(23) \quad \mathbf{m} = I S \mathbf{n}, \quad \text{単位: Am}^2 .$$

