1. スタンダード第 6 回の問題 2 の単振り子について考える．小問 (d) より，角度変数 θ の運動方程式は,
$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta\,, \tag{1}$$
である．ここで，$\omega_0 \equiv \sqrt{g/\ell}$ は振幅が小さい場合の角振動数である．

   (a) 式 (1) から,
   $$\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_A)\,, \tag{2}$$
   を導け．ただし，θ_A は θ の最大値である．(この式はエネルギー保存則を表している．)

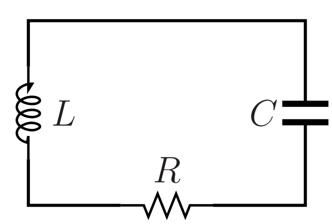
   (b) 式 (2) から，$t = 0$ で $\theta = 0, \dot{\theta} > 0$ として，$\theta = \theta_A$ となる時刻 $\tau/4$(周期の 4 分の 1) が
   $$\frac{\tau}{4} = \frac{1}{2\omega_0}\int_0^{\theta_A} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_A/2) - \sin^2(\theta/2)}}\,, \tag{3}$$
   と書けることを示せ．

   (c) 式 (3) で,
   $$\sin\beta = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_A/2)}\,,$$
   と置いて，右辺を β についての積分に変換せよ．

   (d) 上で得た式の被積分関数を $O(\sin^2(\theta_A/2))$ まで展開し，項別積分を実行して,
   $$\tau = \tau_0\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2(\theta_A/2) + \cdots\right]\,,$$
   となることを示せ．ただし，$\tau_0 = 2\pi/\omega_0$ は振幅が小さいときの周期である．

   (e) $\theta_A = 30^\circ$ のとき，周期は τ_0 からどれくらい変化するか．

2. 右図のようなコイル (インダクタンス L)，コンデンサー (容量 C)，抵抗 R からなる LCR 直列回路を考える．コンデンサーに蓄えられた電荷を $Q(t)$ とすると，電流は $I(t) = dQ/dt$ で，Q の満す微分方程式は,



$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = 0\,,$$
となる．この系と減衰のある調和振動子とが数学的には全く同等であることを説明せよ．Q，I，L，C，R は振動子系では何に相当するか．