2007年度 力学1演義 (アドバンス) 問題 No. 2 (2007/04/20)

1. 式
$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{1}$$
を示し，さらに，
$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{2}$$
を示せ.

2. 次の式を示せ.
$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = 0\,. \tag{3}$$

3. 次の式を示せ.
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\,. \tag{4}$$

4. 質量 m，座標 $\boldsymbol{r}$ の質点の運動について考える.
   (a) 速度 $\boldsymbol{v}$ と角速度 $\boldsymbol{\omega}$ の関係は，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ と書ける．この式の両辺の次元が一致していることを確かめよ.
   (b) 角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{\omega} - m(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}$ と書けることを示せ.
   (c) 運動エネルギー $T = m\boldsymbol{v}^2/2$ を $T = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}/2$ と書けることを示せ.

5. 地面から一定の角度でボールを投げる際の放物運動について考える．空気抵抗などは無視する.
   (a) 初速度を 2 倍にすると最高高度，到達距離，飛行時間はそれぞれ何倍になるか.
   (b) 月面での重力加速度を地球の 1/6 とすると，同じ初速度で投げると，月面での最高高度，到達距離，飛行時間は，それぞれ地球の場合の何倍になるか.

6. 抵抗が速度の 2 乗に比例する場合の落体の運動方程式
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -s\mu\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - mg\,, \quad s \equiv \frac{dx}{dt}\Big/\left|\frac{dx}{dt}\right| \tag{5}$$
を無次元化せよ.