2007 年度 力学 1 演義 (アドバンス) 問題 No. 4 (2007/05/11)

1. $A+B \to C$ という化学反応の時刻 t での反応率は，その時刻の A, B の濃度に比例するだろう．時刻 $t=0$ での A, B, C の濃度を $A_0, B_0, 0$ とすると，時刻 t での C の濃度 $C(t)$ は次の微分方程式を満す．

$$\frac{dC}{dt} = \alpha\{A_0 - C(t)\}\{B_0 - C(t)\}\,. \tag{1}$$

   $C(t)$ を求めよ．

2. ベルヌーイ (Bernoulli) の方程式

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)y^n \tag{2}$$

   について考える．

   (a) この微分方程式が線形となる n の値を求めよ．

   (b) n が上で求めた値以外のとき，すなわち非線形のとき，$u = y^{1-n}$ と置くことで，この微分方程式を線形微分方程式に変換せよ．

3. 一般の 1 階線形微分方程式

$$\frac{df}{dt} + p(t)f = q(t) \tag{3}$$

   について考える．

   (a) 式 (3) に積分因子 $\alpha(t)$ をかけ，

$$\alpha(t)\frac{df}{dt} + \alpha(t)p(t)f = \alpha(t)q(t)$$

   としたときに，これが

$$\frac{d}{dt}[\alpha(t)f] = \alpha(t)q(t) \tag{4}$$

   となるように $\alpha(t)$ を $p(t)$ の積分で表わせ．

   (b) 微分方程式 (4) を形式的に積分し，$f(t)$ を閉じた形 (f を含まず，積分定数以外の未知のものに依存しない形) で表わせ．

   (c) この解を，斉次方程式の一般解と非斉次方程式の特解に分離せよ．

   (d) $p(t)$ が定数のとき，この解が微分演算子法で求めた解に一致することを確かめよ．